マルコフ連鎖の時間発展

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L05(2019-05-09 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2019-05-09 Thu 15:41 JST hig"

今日の目標

- マルコフ連鎖の時間発展を求められる. さらに, 極限分布の有無, 収束の様子を説明できる
- マルコフ連鎖の状態に関する, 母期待値, 母比率を計算できる

L04-Q1

Quiz 解答:マルコフ連鎖の推移確率行列

推移図略.

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

L04-Q2

Quiz 解答:マルコフ連鎖の推移確率行列

推移図略.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L04-Q3

Quiz 解答:マルコフ連鎖の時間発展

1. 転置推移確率行列 M の固有値 $\lambda_1 = 1$ の固有ベクトル $\vec{u}_1$ を (あるなら) 求めればよい. $M\vec{u}_1 = \vec{u}_1$ を解いて, $\vec{u}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) s \quad (s \neq 0)$. 定常分布は, 規格化された $\vec{u}_1 = \frac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.
2. $\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.
3. 転置推移確率行列 M の固有値 (絶対値の大きさの順に) λ_1, λ_2, 対応

ここまで来たよ

5. 略解:マルコフ連鎖

6. マルコフ連鎖の時間発展
   - マルコフ連鎖の時間発展
   - 一般の場合:可約なマルコフ連鎖, 周期的なマルコフ連鎖
   - マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

分布の時間発展 I

L05-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の時間発展)

状態空間 $\{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える．転置推移確率行列は

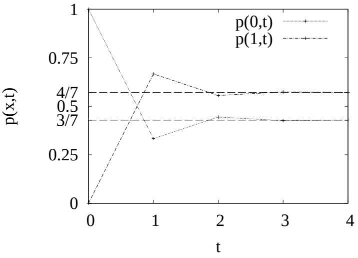
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

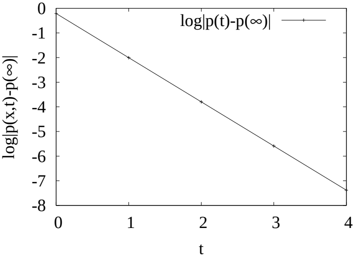
1. 定常分布をすべて求めよう．
2. 初期分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(1)$ を求めよう．
3. この初期分布のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう．
4. この初期分布のとき極限分布 $\lim_{t \to +\infty} \vec{p}(t)$ と収束の様子を調べよう．
5. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう．

分布の時間発展 II

極限分布

(存在するなら) $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} \vec{p}(t)$ を極限分布という.


p(0,t)
p(1,t)
1
0.75
4/7
0.5
3/7
0.25
0
p(x,t)
0
1
2
3
4
t


log|p(t)-p(∞)|
log|p(x,t)-p(∞)|
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
0
1
2
3
4
t

L05-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の定常分布)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $\{0,1,2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

なお, M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使ってよい.

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

典型的なケースでのマルコフ連鎖の時間発展 I

状態空間 $S = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖.
転置推移確率行列 M の固有値 $\lambda_i, \vec{u}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.
仮定 大きさの順に次のようだとする. $\vec{u}_1$ は確率ベクトルにとっておく.

$$1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_m| \geq 0.$$

$$解 \vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 \lambda_2^t + a_3 \vec{u}_3 \lambda_3^t + \cdots .$$

極限分布 $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} \vec{p}(t) = \vec{u}_1$.

初期分布 $\vec{p}(0)$ によらず,

極限分布が存在するなら, それは必ず定常分布. なぜなら

この場合の観察

- 第 1 固有値は 1. 転置推移確率行列の固有値には，いつでも 1 が含まれることを示したのだった. 先週の証明
- 第 1 固有ベクトル $\vec{u}_1$ は確率ベクトルにとれた．それは$\boxed{}$．実はいつでもとれる． ペロン-フロベニウスの定理
- 第 2 以降の固有値の絶対値が 1 より小なので $\boxed{}$第 2 固有値の絶対値が小さいほど，極限分布に速く収束する
- 第 2 以降の固有ベクトルは $\boxed{}$

これは典型的な場合で，一般にはそうでない場合もある

- 典型的である＝既約 (可約でない) かつ非周期的

マルコフ連鎖での母期待値の計算

定義 $p(x,t) = P(X(t) = x)$ から,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\phi(X(t))] &= \sum_x \phi(x) f(x) = \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) p(x,t) \\
&= \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) (M^t \vec{p}(0))_x \\
&= (\phi(0)\phi(1) \cdots \phi(m-1)) M^t \vec{p}(0)
\end{aligned}$$

母比率もこののりで.

L05-Q3

Quiz(マルコフ連鎖の母期待値の時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ, 状態空間 $S=\{x\}=\{0,1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

初期分布を $\vec{p}(0)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ とする

1. 母期待値 $\mathrm{E}[(X(t)+1)^2]$ を求めよう.
2. 条件 $X(t)>0$ が成立する母比率を求めよう.

ここまで来たよ

一般の場合 1:可約なマルコフ連鎖 I

L05-Q4

Quiz(可約なマルコフ連鎖の定常状態)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
2. $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
3. 推移図を書こう.

Hint. 固有値 $\lambda = 1$(重解), $\frac{1}{3}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 使用可.

既約 (irreducible) なマルコフ連鎖=可約でないマルコフ連鎖

どの状態からどの状態へも, 確率 > 0 の矢印をたどって到達できるとき, マルコフ連鎖は (推移確率行列は) 既約であるという. 既約でないとき, 可約であるという. 可約なとき, 複数の定常状態が存在する.

一般の場合 2:周期的なマルコフ連鎖 I

L05-Q5

Quiz(マルコフ連鎖)

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列 M は次.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 任意の初期分布は定常分布に近づくか考えよう.
3. 推移図を描こう.

Hint: $\lambda_j = \omega^j = (\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^j \quad (j = 0, 1, 2)$ 固有ベクトル
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} s$

周期的な状態

$k > 1$ 回おきにしか自分に戻ってこない状態. 周期的な状態があると, 絶対値 1 の固有値が複数ある. このとき, 初期分布によっては極限分布がないことがある.

- 典型的である=既約 (可約でない) かつ非周期的
- 典型的でない=可約または周期的

L05-Q6

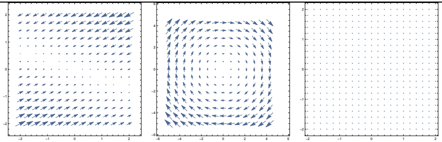
Quiz(周期的なマルコフ連鎖の定常状態)

次の転置推移確率行列をもつ, 状態空間 $S = \{0,1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. マルコフ連鎖の定常分布を求めよう.
2. $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?
3. $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?

常微分方程式系とマルコフ連鎖☆

常微分方程式系　数理モデル II	マルコフ連鎖　計算科学
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}(t) = A\vec{p}(t)$	$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$ $\vec{p}(t) - \vec{p}(t-1) = (M-E)\vec{p}(t-1)$
$\vec{p}(t) = \mathrm{e}^{At}\vec{p}(0)$ $(\mathrm{e}^{A})^t$	$\vec{p}(t) = M^t\vec{p}(0)$ $(\mathrm{e}^{M-E})^t \simeq (E + (M-E))^t = M^t.$
A の固有値 θ の実部が 0 $\theta = a + bi$	M の固有値 $\lambda = \mathrm{e}^{\theta}$ の絶対値が 1 $\lambda = \mathrm{e}^{\theta} = \mathrm{e}^{a+bi}$
	典型的, 周期的, 可約

ここまで来たよ

5 略解:マルコフ連鎖

6 マルコフ連鎖の時間発展

- マルコフ連鎖の時間発展
- 一般の場合:可約なマルコフ連鎖, 周期的なマルコフ連鎖
- マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

マルコフ連鎖の時間発展の数値計算 I

状態 $x = 0, \dots, m-1$ の m 状態のマルコフ連鎖を考える.
分布 $\vec{p}(t)$, $p(x,t)$ →

```
double p[m]={1.0,0.0,....,0.0}; /*配列. mは整数.*/
/* {p(0,t), p(1,t), p(2,t),...,p(m-1,t)} */
```

転置推移確率行列 $M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$ →

```
double M[][m]= {{0.1,0.3},
                {0.9,0.7}}; /* 2次元配列 */
```

$\{\{p_{00}, p_{01}\},$
$\{p_{10}, p_{11}\}\}$

行列とベクトルの積

$$\vec{q} = M\vec{p} \to q_x = \sum_y M_{xy} p_y.$$

```
p[]をp(x,0)で初期化;
 pを出力;
for(t){
   pn=M p;/*行列とベクトルの積*/
   p=pn;
    pを出力;
}
```

予習復習問題のやり方+今後の予定

Learn Math Moodle
`https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle`

Moodle App for iOS/Android

URL をきかれたら `https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle` で登録.

お知らせ

- Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 樋口オフィスアワー火 5(1-507/1-542)