ランダムウォークの境界条件・偏微分方程式の数値計算

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L06(2019-05-16 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2019-05-16 Thu 18:51 JST hig"

今日の目標

- 反射, 吸収, 周期壁を説明できる
- ランダムウォークと拡散方程式の関係が説明できる

L05-Q1
Quiz 解答:マルコフ連鎖の時間発展

1. 転置推移確率行列 M の固有値 $\lambda_1 = 1$ の固有ベクトル $\vec{u}_1$ を (あるなら) 求めればよい. $M\vec{u}_1 = \vec{u}_1$ を解いて, $\vec{u}_1 = \binom{3}{4} s \quad (s \neq 0)$. 定常分布は, 規格化された $\vec{u}_1 = \frac{1}{7}\binom{3}{4}$.
2. $\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\binom{1}{2}$.
3. 転置推移確率行列 M の固有値 (絶対値の大きさの順に) λ_1, λ_2, 対応する固有ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ を求めると,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{6}, \qquad \vec{u}_1 = \binom{3}{4} s, \vec{u}_2 = \binom{1}{-1} s \quad (s \neq 0).$$

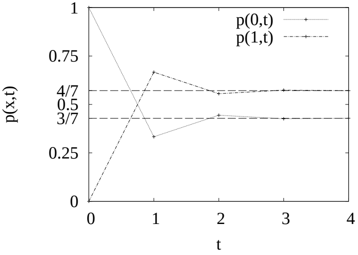
固有方程式には解 $\lambda_1 = 1$ があることが最初からわかってるから, 因数分解は楽.

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ とも $s=1$ に固定する (他の取り方をしても最終的には同じ $\vec{p}(t)$ が求まる). このとき, $\vec{p}(0)=a\vec{u}_1+b\vec{u}_2$ で係数 a,b を決めると, $a=\frac{1}{7}, b=\frac{1}{14}$.

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) =& M^t\vec{p}(0)\\ =& M^t(a\vec{u}_1+b\vec{u}_2)\\ =& \lambda_1^t a\vec{u}_1+\lambda_2^t b\vec{u}_2\\ =& \tfrac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)+\tfrac{4}{7}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)(-\tfrac{1}{6})^t.\end{aligned}$$

$\vec{u}_1$ の係数が $\frac{1}{7}$ である (=この項が確率ベクトルである) ので, $t\to+\infty$ でも $\vec{p}(t)$ が確率ベクトルでありつづけることが確認できる. (固有値が $\lambda=1,-\frac{1}{6}$ となった時点で, 第 1 項が確率ベクトルになるはず, ということから, 1 次方程式を解かずに $a=\frac{1}{7}$ と決められたはずだった).

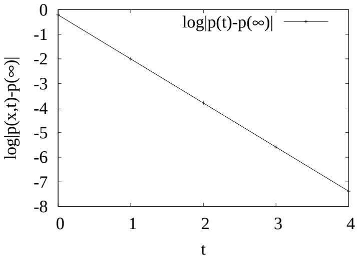
時間変化. $|-\frac{1}{6}|<1$ なので, $\vec{p}(t)\to\frac{1}{7}\left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right) \quad (t\to+\infty)$



4. 極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{7}\binom{3}{4}$ との差の大きさ (ベクトルの長さ) を考えると,

$$
\begin{aligned}
|\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| &= \left| \frac{4}{7}\binom{1}{-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^t \right| \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{7}\left(\frac{1}{6}\right)^t \\
\log|\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| &= t \times \log\frac{1}{6} + \log\frac{4\sqrt{2}}{7}
\end{aligned}
$$

よって, t 対 $\log|$差$|$ のグラフを描くと, 傾き $\log|$第 2 固有値$|(< 0)$ の直線になるはず.



状態空間が 3 点以上からなり, (第 2 固有値より絶対値が小さい) 第 3 固有値以降がある場合も, t が大きいところではこの直線に近づいていく.

さらに t を大きくすると, $|\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ が桁落ちしたり, 数値的に 0 とみなされるなどで, 直線から外れる.

5.

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{6}\right)^t$$

L06-Q2
Quiz 解答:マルコフ連鎖の定常分布

1. 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルである確率ベクトルは $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ のみであり, これが唯一の定常分布
2. $$\vec{p}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\left(\frac{3}{4}\right)^t + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^t$$
3. 式でまともに計算すると, 固有ベクトルの内積 $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3$ とか出てきてたいへん, だけど, $t \to +\infty$ では, $\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)$ の第 3 項が (第 2 項と比べて) 無視できて,

$$\begin{aligned}\log|\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| &= \log\left|-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\left(\frac{3}{4}\right)^t\right| + \text{もっと小さい項}\\ &= t\log\frac{3}{4} + \log\frac{\sqrt{2}}{6} + \text{もっと小さい項}\end{aligned}$$

となる.

L06-Q3
Quiz 解答:マルコフ連鎖の母期待値の時間発展

1. 分布の時間発展は,

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \frac{4}{7}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(-\tfrac{1}{6})^t.$$

母期待値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X(t)+1)^2] =& \sum_{x=0}^{1}(x+1)^2 \cdot p(x,t) \\
=& (0+1)^2(\tfrac{3}{7}+\tfrac{4}{7}(-\tfrac{1}{6})^t) + (1+1)^2(\tfrac{4}{7}+\tfrac{-4}{7}(-\tfrac{1}{6})^t) \\
=& \tfrac{19}{7} - \tfrac{12}{7}(-\tfrac{1}{6})^t
\end{aligned}$$

今の場合は極限分布が定常分布なので, 母期待値も, $t \to +\infty$ で定常分布 $\vec{u}_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ の母期待値 $(0+1)^2 \cdot \frac{3}{7} + (1+1)^2 \cdot \frac{4}{7}$ に収束する.

2

$$\begin{aligned} P(X(t)>0)=\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X>0]}(X)] =&(0\ 1)\vec{p}(t) \\ =&p(1,t)=\frac{4}{7}-\frac{4}{7}(-\frac{1}{6})^t \end{aligned}$$

L05-Q4

Quiz 解答:可約なマルコフ連鎖の定常状態

固有値 $\lambda=1$ (重解) に対応する固有ベクトルは,
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}s+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}k\quad(s\neq 0$ または $k\neq 0)$. 固有値 1 なので, 線形独立な確率ベクトルを 1 組選ぶと便利 (他の選び方でも最終的な結果は変わらない) で, $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ とすると, $s\vec{u}_1+(1-s)\vec{u}_2\ (0\leq s\leq 1)$ は定常分布.
固有値 $\lambda=\frac{1}{3}$ に対する固有ベクトルは, $\begin{pmatrix}0\\+1\\-1\end{pmatrix}s(s\neq 0)$. 確率ベクトルにはなりえないので, 適当に非零ベクトルをひとつ選んで (他の選び方でも最終的な結果は変わらない), $\vec{u}_3=\begin{pmatrix}0\\+1\\-1\end{pmatrix}$.

$\vec{p}(0)$ が一般の場合の時間発展は

$$\vec{p}(t) = a\vec{u}_1 1^t + b\vec{u}_2 1^t + c\vec{u}_3 \cdot (\tfrac{1}{3})^t.$$

1. $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から a, b, c を定めて,

$$\vec{p}(t) = \tfrac{1}{2}\vec{u}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{u}_2 + \tfrac{1}{4}\vec{u}_3 \cdot (\tfrac{1}{3})^t$$

   極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は定常分布のひとつ.

2. $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ から a, b, c を定めて,

$$\vec{p}(t) = \tfrac{1}{3}\vec{u}_1 + \tfrac{2}{3}\vec{u}_2 + 0\vec{u}_3 \cdot (\tfrac{1}{3})^t$$

   極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は定常分布のひとつ.

3. $\{0\}$ と $\{1,2\}$ が分かれた推移図．すなわち，可約なマルコフ連鎖である．

L05-Q5

Quiz 解答:マルコフ連鎖

1. 推移確率行列 T の固有値 λ, 固有ベクトルを求めると，

$$\lambda = 1, \omega, \omega^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} s \quad (s \neq 0)$$

定常分布は $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルで，確率ベクトルになるように s を定めると，$\vec{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. 他の固有値 $\lambda = \omega, \omega^2$ は，$|\omega| = |\omega^2| = 1$ を満たす．よって，一般には極限分布は存在しない．
極限分布が存在するのは，$\vec{p}(0) = \vec{u}_1 = \vec{p}(t)$ のように最初から定常分布であったときに限られる．

3. 3 個の状態が 1 方向に回るような推移図.

L05-Q6

Quiz 解答:周期的なマルコフ連鎖の定常状態

1. 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s \ (s \neq 0)$.
   確率ベクトルになるように s を選んで, $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が定常分布.
   なお, 固有値 -1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s \ (s \neq 0)$.
   適当に s を選んで, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく,
   一般に $\vec{p}(t) = a\vec{u}_1 1^t + b\vec{u}_2 \cdot (-1)^t$.
2. $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ から a, b を定めると $\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + \frac{1}{6}\vec{u}_2 \cdot (-1)^t$. 振動するので極限分布は存在しない.
3. $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ から a, b を定めると $a = 1, b = 0$ で $\vec{p}(t) = \vec{u}_1$. 極限分布は $\vec{p}(\infty) = \vec{u}_1$ であり定常分布.

ここまで来たよ

6 略解:マルコフ連鎖の時間発展

7 ランダムウォークの境界条件・偏微分方程式の数値計算
- マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

8 ランダムウォークの境界条件・偏微分方程式の数値計算
- ランダムウォークの境界条件
- $p(x,t)$ の満たす偏微分方程式

マルコフ連鎖の時間発展の C での数値計算 I

状態 $x = 0, \dots, m-1$ の m 状態のマルコフ連鎖を考える.
分布 $\vec{p}(t)$, $p(x,t) \to$

```
double p[m]={1.0,0.0,....,0.0}; /*配列. m は変数じゃなく整数の定数*/
/* {p(0,t), p(1,t), p(2,t),...,p(m-1,t)} */
```

転置推移確率行列 $M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \to$

```
double M[][2]= {{0.1,0.3},
                {0.9,0.7}}; /* 2次元配列 */
```

$\{\{p_{00}, p_{01}\},$
$\{p_{10}, p_{11}\}\}$

行列とベクトルの積

$\vec{q} = M\vec{p} \to q_x = \sum_y M_{xy} p_y.$

```
p[] をp(x,0) で初期化;
 pを出力;
 for(t){
   pn=M p; /*行列とベクトルの積*/
   p=pn;
    pを出力;
 }
```

ここまで来たよ

6 略解:マルコフ連鎖の時間発展

7 ランダムウォークの境界条件・偏微分方程式の数値計算
- マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

8 ランダムウォークの境界条件・偏微分方程式の数値計算
- ランダムウォークの境界条件
- $p(x,t)$ の満たす偏微分方程式

ランダムウォークの 2 つの表現

$\boxed{1}$ 確率シミュレーション　　sim*　　ラグランジュ表現

$$X(t) = X(t-1) + R(t), \quad P(R(t) = \pm 1) = \frac{1}{2}. \quad P(X(3) = 9) = 1.$$

$\downarrow P(X(t) = x) = p(x,t)$

$\boxed{2}$ マルコフ連鎖の分布の厳密数値計算　　markov　　オイラー表現

$$p(x,t) = \frac{1}{2}p(x-1,t-1) + \frac{1}{2}p(x+1,t-1). \quad p(x,3) = \begin{cases} 1 (x=9) \\ 0 (他) \end{cases}$$

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1),$$

ずっと, $-\infty < X(t) < +\infty$ なつもりで考えていた. 計算機で表現できる?

$\boxed{1}\boxed{2}$ int x がオーバーフローするとだめ

$\boxed{2}$ $p(x,t) =$ `double p[M]` で, $0 \le x < M$ の範囲しか対応できない. $\rightarrow$ M を大きくとって, 範囲をずらせば? $\rightarrow$ しょせんメモリーには上限.

$\boxed{2}$ ベクトル $\vec{p}$, 行列 M の端のところをどうする?

端で困る

$S = \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

• $x = 0, x = m-1$ にいるウォーカーには, 左 (右) に飛ぼうとしたときどうする? $\rightsquigarrow$ とりあえず無視したのが下.

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$$

$h = 1/2$, $m = 6$.

$$\begin{pmatrix} p(0,t) \\ p(1,t) \\ \vdots \\ p(m-2,t) \\ p(m-1,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0,t-1) \\ p(1,t-1) \\ \vdots \\ p(m-2,t-1) \\ p(m-1,t-1) \end{pmatrix}$$

転置確率行列になってない! 推移図を描いてみよう

ランダムウォークの端スペシャルルール=境界条件

$1 \leq x \leq m-2$ は普通の場所, 端 $x=0, x=m-1$ は特別 (壁) と思おう. $x=0$ でのありうるルール=境界条件. 壁はランダムウォークの時の言葉.

- 吸収壁 $x=1$ から $x=0$ に移ったウォーカーはそれ以降動かない
- 反射壁 $x=1$ から $x=0$ に移ろうとするウォーカーは $x=1$ にもどされる
- 周期 '壁' $x=1$ から $x=0$ に行こうとしたら $x=m-2$ に飛ぶ (ワープ). $x=0$ と $x=m-2$ は同じ場所. $x=m-2$ から $x=m-1$ に行こうとしたら⋯

$\to$ X のルールや M を境界条件に合わせて修正.

反射壁, 周期壁では, $x=0, m-1$ は実在しないかのように思って「つめる」ほうがふつう.

壁を分布 p と転置推移確率行列 M の言葉で言うと?

3 つの場合の推移図を描いてみよう.

3 つの場合の (間違った) 転置推移確率行列を修正しよう.

吸収壁

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

ディリクレ境界条件 (現象の数理 A) の一種,$p(0,t) =$ 指定, 固定端 (現象の数理 B)

反射壁

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

ノイマン境界条件 (現象の数理 A), $\frac{\partial p}{\partial x}(0,t) =$ 指定, 自由端 (現象の数理 B)

周期壁

$$\begin{pmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

周期境界条件, $p(0,t) = p(m-1,t)$

L06-Q1

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の転置推移確率行列)

状態空間 $\{x\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上のランダムウォークの座標 $X(t)$ が, 次の漸化式と初期条件で定まる.

$$\begin{aligned} X(t) =& X(t-1) + R(t), \quad (t = 1, 2, \ldots) \\ X(0) =& 2 \end{aligned}$$

ここで, $R(t)$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ は独立同分布

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} \frac{1}{7} & (r = -1) \\ \frac{4}{7} & (r = 0) \\ \frac{2}{7} & (r = +1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう確率変数である.
ただし, $x = 0, 4$ が吸収壁であるとする. これをマルコフ連鎖として考える.

1. 転置推移確率行列 M を書こう.
2. 推移図を書こう.

マルコフ連鎖とランダムウォーク

(整数座標) ランダムウォークは, マルコフ連鎖の中の単純な特別な一例.

- マルコフ過程
  - マルコフ連鎖 (比較的単純なもの)
    - 整数座標ランダムウォーク (状態空間 $S = \{x\}$ が, ユークリッド空間の格子点の構造を持っていて, 転置推移確率行列が空間の近くの点への移動のルールになっていて, ルールが (ほぼ) 空間的に一様であるもの)
    - 猫
    - 他多数
  - 一般のマルコフ過程
    - 連続座標ランダムウォーク (次回くらいから)
    - AR(M), ARMA(m), ARIMA(m) モデルは, マルコフ過程の他の例 (もうすぐ出てくる)

ここまで来たよ

6 略解:マルコフ連鎖の時間発展

7 ランダムウォークの境界条件・偏微分方程式の数値計算
- マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

8 ランダムウォークの境界条件・偏微分方程式の数値計算
- ランダムウォークの境界条件
- $p(x,t)$ の満たす偏微分方程式

$p(x,t)$ の満たす偏微分方程式

x,t:整数, $p(x,t)$,$X(t)$:数列, $t+1$, $x\pm 1$, 漸化式, って言ってきたけど,
$\rightsquigarrow$ x,t:実数, $p(x,t)$ や $X(t)$:関数, $t+\Delta t$, $x\pm\Delta x$, 極限で微分方程式

$$\begin{aligned} p(x,t) =& \tfrac{1}{2}p(x-1,t-1)+\tfrac{1}{2}p(x+1,t-1) \\ p(x,t+1) =& \tfrac{1}{2}p(x-1,t)+\tfrac{1}{2}p(x+1,t) \\ \rightsquigarrow p(x,t+\Delta t) =& \tfrac{1}{2}p(x-\Delta x,t)+\tfrac{1}{2}p(x+\Delta x,t) \end{aligned}$$

復習:微分の差分近似

$$f(x+\Delta x)-f(x)\simeq f'(x)\Delta x$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(x)\quad(\Delta x\to 0)$$

$$\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}\to\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}(x)\quad(\Delta x\to 0)$$

$\pm\Delta t, \pm\Delta x$ を微分で書きたい$\cdots$

$$
\begin{aligned}
p(x,t+\Delta t)-p(x,t) =& \frac{1}{2}[(p(x+\Delta x,t)-p(x,t)) \\
&\qquad -(p(x,t)-p(x-\Delta x,t))] \\
\frac{\partial p}{\partial t}(x,t)\Delta t =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)-\frac{\partial p}{\partial x}(x-\Delta x,t)\right)\Delta x \\
\frac{\partial p}{\partial t}(x,t)\Delta t =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)\Delta x\right)\Delta x \\
\frac{\partial p}{\partial t}(x,t) =& \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)
\end{aligned}
$$

熱や濃度のときは $p(x,t)$ でなく, よく $u(x,t)$ で書く.
$\frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \rightsquigarrow D > 0$:拡散定数.
左右の推移確率が異なるとき, 移流項 $\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)$ も残る.
移動しない ($x \to x$) 確率が正の時も同様.

現象の数理 A

拡散方程式

拡散方程式 (diffusion equation, heat equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (x_{\mathsf{min}} < x < x_{\mathsf{max}}, t > 0)$$

初期条件 $u(x,0) = x$ の関数　$(x_{\mathsf{min}} < x < x_{\mathsf{max}})$

境界条件例えば $u(x_{\mathsf{min}},t) = u(x_{\mathsf{max}},t) = 0 \qquad (t \geq 0)$ 吸収壁

x 軸上を, 棒を熱が, 水を溶けた砂糖が, 空気をにおい分子が, 伝わる

$u(x,t)$: 時刻 t における, 位置 x の $\boxed{}$

u: $\boxed{}$ 変数, x, t: 独立変数

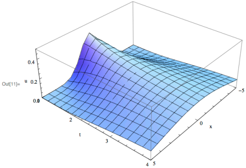
偏微分方程式 (PDE=partial differential equation)

偏微分方程式とは, 多変数関数 $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対する微分方程式で, いろんな独立変数の偏微分が混ざってるもの　偏微分方程式 (4 年次)

$\leftrightarrow$ 常微分方程式 $u'(t) = -2u(t)$. $x''(t) = -x(t)$.

- 常微分方程式の解 $x(t)$: 数 x が変化していく.
- 偏微分方程式の解 $u(x, t)$: 関数 $u(x)$ が変化していく

アニメ `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/compsci2_2013/img/pde-diff.gif`



線形 2 階偏微分方程式の分類

- 拡散方程式, 熱方程式は, 放物型 現象の数理 A
- 波動方程式は双曲型 現象の数理 B 電気・磁気
- ラプラス方程式は 楕円型 太鼓の形 電気・磁気

印刷版のみ

拡散方程式の解の例 $D > 0$ は拡散定数.

現象の数理 A

- $u(x,t) = a(2t + x^2) + bx + c$. 確率, 熱, 砂糖の合計が変化しちゃう $\to$ 初期条件, 境界条件.
- $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2Dt}}$ 有名な解. t を固定したとき, 母平均値 0, 母分散 Dt の正規分布 $\mathrm{N}(0, Dt)$ の確率密度関数.
- $u(x,t) = \mathrm{e}^{-c^2 Dt} \sin(cx)$. ($c \in \mathbb{R}$ は定数)

- 微分方程式とは $\boxed{}$
- 初期条件とは $\boxed{}$
- 境界条件とは $\boxed{}$

L06-Q2

Quiz(偏微分方程式)

次のうち, 偏微分方程式と呼べるのはどれとどれ?

1. 計算科学 B でやった $p(x,t)$ の漸化式の極限の微分方程式
2. 物理数学 II でやったニュートンの運動方程式 $mx'' = -kx - bx'$.
3. 物理数学 II や数理モデル基礎 I でやった $x'' + ax' + bx = c$.
4. 関数論でやった コーシー-リーマンの関係式
5. 計算科学 A でやったルンゲクッタ法で解ける微分方程式
6. 数理モデル基礎 II でやった, 平衡点のタイプを考えるような連立微分方程式

L06-Q3

Quiz(偏微分方程式の条件チェック)

t を時間, x を位置とする. 偏微分方程式 (と境界条件, 初期値条件)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) =& 2 \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (0 < x < 2\pi, t \geq 0) \\ u(0,t) =& u(2\pi,t) = 0 \qquad (t \geq 0) \\ u(x,0) =& \sin(3x) \qquad (0 < x < 2\pi) \end{aligned}$$

を考える.
関数

$$u(x,t) = A\mathrm{e}^{Bt}\sin(Cx)$$

で, $A, B, C \in \mathbb{R}$ を定めて, 上の偏微分方程式と初期条件境界条件を満たすようにしよう.

予習復習問題のやり方+今後の予定

Learn Math Moodle
`https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle`

お知らせ

Moodle App for iOS/Android

URL をきかれたら `https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle` で登録.

- Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 樋口オフィスアワー火 5(1-507/1-542)