

疎な転置推移確率行列

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B E05(2019-05-23 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2019-05-17 Fri 16:20 JST hig"



<http://hig3.net>

マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

状態 $x = 0, \dots, m-1$ の m 状態のマルコフ連鎖を考える。

分布 $\vec{p}(t), p(x, t) \rightarrow$

```

1  double p[m] = {1.0, 0.0, ..., 0.0}; /* 配列. mは整数.*/
2  /* {p(0,t), p(1,t), p(2,t), ..., p(m-1,t)} */

```

転置推移確率行列 $M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix} \rightarrow$

```

1  double M[][m] = {{0.1, 0.3},
2                      {0.9, 0.7}}; /* 2次元配列 */

```

$\{\{p_{00}, p_{01}\},$
 $\{p_{10}, p_{11}\}\}$

行列とベクトルの積

$$\vec{q} = M\vec{p} \rightarrow q_x = \sum_y M_{xy}p_y.$$

```

1  p[] を p(x,0) で初期化;
2  p を出力;
3  for (t){
4      pn=M p; /*行列とベクトルの積*/
5      p=pn;
6      p を出力;
7  }

```

サンプル https://www.data.math.ryukoku.ac.jp/course/compscib_2019/p/markov01/src/markov01sample.c

ここまで来たよ

- 疎な転置推移確率行列
 - 状態数が大きく規則的なマルコフ連鎖の時間発展の数値計算

状態数が大きく規則的なマルコフ連鎖の時間発展の数値計算

例: ランダムウォークや偏微分方程式

マルコフ過程の数値計算を使って, 解こう.

$-\infty < x < +\infty$ とは言えないけど, $\bar{p}(t)$ は 100 次元くらいで.

E05-Q1

Quiz(ランダムウォークの時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ, 状態空間 $S = \{x\} = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

```
1 double p[m], q[m];
```

で表される \bar{p}, \bar{q} に対して, 入力 \bar{p} を受け取り $\bar{q} = M\bar{p}$ を計算する関数

```
1 int multiply_trans(double q[], double p[], int m);
```

を書こう. 行列 M を 2次元配列で表現せず, M の規則性を利用して (=加算や代入の回数が $\mathcal{O}(m^2)$ でなく $\mathcal{O}(m)$ となるように) 書くこと.

次元 m が小さいとき

```

1  int multiply_trans(double q[], double p[], int m){
2  int x,y;
3  double M[][NS]={ {0.0,1.0,0.0, /*略*/ ,0.};
4  for (x=0;x<m;x++){
5      q[x]=0;
6      for (y=0;y<m;y++){
7          q[x]+=M[x][y]*p[y];
8      }
9  }
10 return 1;
11 }
```

Quiz 解答: ランダムウォークの時間発展

ソースコード 1: 疎な転置推移確率行列

```

1  int multiply_trans(double q[], double p[], int m){
2  int x;
3  for (x=0;x<m-1;x++){
4      q[x]=1.0*p[x+1]/* +0.0*p[x+2]*/;
5  }
6  q[m-1]=1.0*p[0]
7  return 0;
8  }
```

$$\vec{q} = M\vec{p}.$$

$$q_x = \sum_{y=0}^{m-1} M_{xy}p_y \stackrel{\text{今の場合}}{=} 0 + \cdots + 0 + 1 \times p_{x+1} + 0 + \cdots + 0 \quad (x < m-1).$$

疎行列 sparse matrix ほとんどの成分が 0 な行列. 2次元配列でなく, 上のような表現方法をとったほうがよい.

E05-Q2

Quiz(大きな転置推移確率行列をかける関数)

次の推移確率行列を持つ, 状態空間 $\{x\} = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{10} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} & 0 & & \vdots \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \frac{2}{10} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{3}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}.$$

```
1 | double p[m], q[m];
```

で表される \vec{p}, \vec{q} に対して, 入力 \vec{p} を受け取り $\vec{q} = M\vec{p}$ を計算する関数

```
1 | int multiply_trans(double q[], double p[], int m);
```

を書こう. 行列 M を 2次元配列で表現せず, M の規則性を利用して書くこと.

個人 PC に Visual Studio をインストール

無料の Visual Studio Community Edition とだいたい同じ.

- <https://visualstudio.microsoft.com/ja/downloads/>
- <https://www.data.math.ryukoku.ac.jp/guide/vs2017/install.php>