オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L08(2019-06-13 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2019-06-14 Fri 08:55 JST hig"

今日の目標

- オイラー/ラグランジュ表現の特徴を説明できる
- ゲーム作成や現象の解析で, オイラー/ラグランジュ表現の特徴を活かして使い分けられる
- 現象の問題を確率変数とランダムウォークの問題に書き替えられる

L07-Q1
Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. $\mathrm{E}[X(20)] = \mathrm{E}[5 + R(4) + \cdots + R(20)] = 5 + 17 \times (-3) = -46.$
2. $\mathrm{V}[X(7)] = \mathrm{V}[5 + R(4) + \cdots + R(20)] \overset{独立}{=} 17 \times 5 = 85.$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 85}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+46)^2}{2 \cdot 85}}.$
4. 「中心極限定理から」, 近似的に $X(20) \sim \mathrm{N}(-46, 85)$. よって, $Z = \frac{X(20)+46}{\sqrt{85}}$ とすると, $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$.
   よって, $P(X(20) \geq -40) = P(Z \geq \frac{-40+46}{\sqrt{85}}) = Q(\frac{6}{\sqrt{85}})$.

L07-Q2
Quiz 解答:AR(1) モデルの例

1. $\phi = 1$ のき, $X(1) = 115, X(2) = 107.$
2. $\phi = 0.9$ のとき, $X(1) = 105, X(2) = 86.5.$
3. $\phi = -0.9$ のとき, $X(1) = -75, X(2) = 59.5.$

ここまで来たよ

実習課題の振り返り:2 つのタイプがあった!

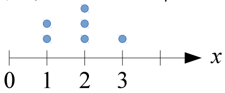
- マルコフ連鎖の数値計算
  - markov, ...
  - 母ナントカ: 厳密. 確率の式を 1 回だけ計算. $p(x,t)$ は確率

    フォッカー-プランク, マスター方程式, 拡散方程式, 熱方程式
  - オイラー表現: 場所ごとに確率をカウント
- 確率シミュレーション
  - rw, sim, contrw, arm, ...
  - 標本ナントカ: 標本サイズだけ乱数で実行を繰りかえして, 標本から推定. $X(t)$ は座標

    ランジュバン方程式
  - ラグランジュ表現:ウォーカーごとに座標をカウント

ラグランジュ表現

確率は忘れて, ウォーカーが大勢いる状況をラグランジュ表現しよう.



数式的

$x^{(k)}(t)$: ウォーカー番号 k 番の, 時刻 t の座標.
上の状況なら
$x^{(0)}(t) = 1, x^{(1)}(t) = 2, x^{(2)}(t) = 2, x^{(3)}(t) = 3, x^{(4)}(t) = 1, x^{(5)}(t) = 2.$

C 的

`x[k]` ウォーカー番号 k 番の座標 (時刻 t とともに, この変数を更新)

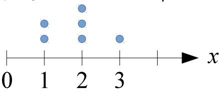
```
int x[6]; /*配列の宣言*/
```

または,

```
int x[]={1,2,2,3,1,2}; /*配列の宣言兼代入*/
```

オイラー表現

確率は忘れて，ウォーカーが大勢いる状況をオイラー表現しよう．



数式的

$P(x,t)$: 時刻 t に，座標 x にいるウォーカーの人数．
上の状況なら
$P(0,t)=0, P(1,t)=2, P(2,t)=3, P(3,t)=1, P(\text{他},t)=0.$

C 的

`P[x]` 座標 x にいるウォーカーの人数 (時刻 t とともに更新)
`int P[100];` /*配列の宣言．$100-1=x$ 座標の上限*/
または
`int P[]={0,2,3,1,0,0,...};` /*配列の宣言兼代入*/
マルコフ連鎖の計算で使ってる `double p[]` は「いわば」 $p=P/N$, $N=6$ がウォーカーの合計人数．

L08-Q1

Quiz(ラグランジュ表現とオイラー表現)

(座標が整数値のみをとる離散型の) ランダムウォークを考える.
6 羽のペンギンが, 座標 $x = 0, 1, 2, \dots, 9$ の範囲をランダムウォークする.
ある時刻 t に, $x = 1$ に 2 羽, $x = 3$ に 3 羽, $x = 8$ に 1 羽いるとする.

1. ラグランジュ表現を用いたとき, 配列 `x[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.
2. オイラー表現を用いたとき, 配列 `P[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.

配列のサイズとは, 元の型の変数を何個集めたかという個数. `int x[SIZE];` の `SIZE`.

ラグランジュ表現とオイラー表現によるプログラムの比較

	ラグランジュ表現	オイラー表現
空間	なんでも	有限個の場所
ウォーカーの区別	あり	なし
得意な問		
シューティング ブロック崩し テトリス ランダムウォーク		

L08-Q2

Quiz(オイラー表現とラグランジュ表現)

次のゲームのオブジェクトのうち, オイラー表現に適したもの (=ラグランジュ表現に適していないもの) を答えよう.

1. シューティングの自機
2. シューティングのミサイル
3. シューティングの雑魚キャラ
4. シューティングのラスボス
5. ブロック崩しのボール
6. ブロック崩しのラケット
7. ブロック崩しのブロック
8. テトリスの落下前のブロック
9. テトリスの落下後のブロック

L08-Q3

Quiz(ラグランジュ表現)

ランダムウォークのラグランジュ表現で, 時刻 t におけるウォーカーの座標 $X(t)$ の標本が配列 `x[SAMPLESIZE]` に格納されているとする.

```
#define SAMPLESIZE 6
double x[SAMPLESIZE];
```

1. 標本平均値 $\overline{X}$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.
2. $X(t) \leq 5$ の標本比率を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい.

L08-Q4

Quiz(オイラー表現)

ランダムウォークのオイラー表現，または，マルコフ連鎖の数値解法のプログラムで，時刻 t において ウォーカーの座標が $X(t)=x$ である確率 $p(x,t)$ が，すでに計算され，配列 `p[x]` に格納されているとする．ただし，$x=0,1,\ldots,19$.

```
#define XMAX 20
double p[XMAX];
```

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X(t)]$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう．
2. 母比率 $P(X(t)\le 5)$ を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう．

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい．

ここまで来たよ

8 略解:連続型確率変数の擬似乱数・自己回帰モデル

9 オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング
- オイラー表現とラグランジュ表現
- 確率モデルによるモデリング

応用:ギャンブラー破産問題とランダムウォーク

10 万円を元手にギャンブルする．毎回 1 万円をかける．0 万円から 2 万円が, 同様に確からしい確率で返ってくる．ギャンブル 100 回のうちに破産する確率は?(20 万円に到達する確率は?)

モデル化

ランダムウォークの言葉で書くと?

応用:B 湖の水位のランダムな増減 I

L08-Q5

Quiz(確率シミュレーションと中心極限定理)

B 湖の毎日の水位の変化 R は, 毎日独立に, -1 cm 以上 2cm 以下の範囲でランダムに定まり, どの値も同様に確からしい. 0 日に水位は 100cm だった.

1. 水位の決まるルールと 30 日の水位が 120cm 以上 125cm 未満である確率をランダムウォークの言葉で書こう
2. 30 日の水位はどんな分布?
3. 30 日の水位が 120cm 以上 125cm 未満である確率を求めよう

ただし, 標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{d}u$ を使って答えてよい. 計算機でシミュレーションして答えてもよい.

応用:B 湖の水位のランダムな増減 II

二項分布の正規近似 高校 数学 B の進化形

次のうちどれは式で求められる? どれは確率シミュレーションで求められる?

1. 10 日目から 20 日目までの水位の増分の母平均値
2. 0 日から 30 日目までずっと 120cm を越えない母比率
3. (15 日目の水位)^3 の母平均値
4. 120cm を越えない日数の母平均値
5. 30 日間の最大水位の母平均値

「何でも」確率シミュレーションで推定できる

応用:2 次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lichtenberg_figure_in_block_of_Plexiglas.jpg
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DLA_Cluster.JPG

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク

```
x=0;
for(t){
  x+=getrandom(getuniform());
}
```

離散座標の場合に getrandom をばらして書くと

```
x=0;
for(t){
  z=getuniform();  /*[0,1)一様乱数． y座標と区別*/
  if(z<0.5){
    x+=1;
  } else {
    x-=1;
  }
}
```

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク	x 軸上をランダムに移動	$X(t)$
2 次元ランダムウォーク	xy 平面上をランダムに移動	$(X(t), Y(t))$

離散座標

```
x=0;y=0;
for(t){
   z=getuniform();
   if(z<0.25){
      x+=1;
   } else if(z<0.5)
      x-=1;
   } else if(z<0.75)
      y+=1;
   } else {
      y-=1;
   }
}
```

連続座標．移動距離もランダムにしてもいい．

```
x=0.0;y=0.0;
for(t){
   z=getuniform();
   x+=cos(2*M_PI*z);
   y+=sin(2*M_PI*z);
}
```

DLA=Diffusion Limit Aggregation 拡散律速凝集のルール

- 原点に「枝の種」＝吸収壁を置く
- 粒子をどこかに置いてランダムウォーク．粒子が枝に接触したらウォーク終了 (吸収壁)
  粒子は枝に固着する $\rightsquigarrow$ 吸収壁が成長
- 粒子をどこかに再度おいてランダムウォーク

1 次元と 2 次元の中間の図形　　応用数理 A

P. Nathan `https://www.youtube.com/watch?v=uBy3Uouy76Q`

S. Higuchi `https://www.youtube.com/watch?v=Y6F86ryRTGs`

予習復習問題のやり方+今後の予定

しばらく情報メディアセンターの Moodle で `https://moodle.media.ryukoku.ac.jp`

お知らせ

Moodle App for iOS/Android

URL をきかれたら `https://moodle.media.ryukoku.ac.jp` で登録.

- Math ラウンジ 1-538
- 樋口オフィスアワー火 5(1-507/1-542)
- 初夏のプチテスト (プログラミング実技) 2019-06-20 木 5
    - マルコフ連鎖
    - R + RStudio
    - 連続型ランダムウォークにおける母比率, 母期待値の推定