連続型確率変数の変換

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L09(2019-06-27 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2019-06-27 Thu 09:15 JST hig"

今日の目標

- 連続型確率変数の関数として定まる確率変数の母期待値を求められる
- 連続型確率変数の関数として定まる確率変数の確率密度関数を求められる

L08-Q1

Quiz 解答:ラグランジュ表現とオイラー表現

1. 6 羽なのでサイズは 6.
   各要素は, `x[]={1,1,3,3,3,8};` (順序はこうである必要はない. 自由にペンギン番号をつけてよい)
2. 座標が $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の計 10 か所なので, サイズは 10.
   各要素は `u[]={0,2,0,3,0,0,0,0,1,0};` (順序はこうである必要がある)

L08-Q2
L08-Q3

Quiz 解答:ラグランジュ表現

```
double ex,px;
int k,sum=0,count=0;
for(k=0;k<SAMPLESIZE;k++){
  sum+=x[k];
  if( x[k]<=5) count++;
}
ex=(double)sum/SAMPLESIZE;
px=(double)count/SAMPLESIZE;
```

L08-Q4

Quiz 解答:オイラー表現

```
int x;
double ex=0.0, px=0.0;
for(x=0;x<XMAX;x++){
  ex+=p[x]*x;
  if(x<=5) px+=p[x];
}
```

ここまで来たよ

確率変数の関数 I

L09-Q1

Quiz(確率変数の変換)

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う連続型確率変数 Y と，$R = g(Y) = 2\sqrt{Y}$ で定まる連続型確率変数 R を考える．

1. $\mathrm{E}[R], \mathrm{V}[R]$ を求めよう．
2. 母比率 (確率) $P(0.2 < R < 0.8)$ を求めよう．
3. 母比率 (確率) $F_{\mathrm{R}}(r) = P(R < r)$ を求めよう．
4. R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう．

R の乱数生成は簡単.

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=2*sqrt(y);
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```

標本

y	$r=2\sqrt{y}$
0.00	0.00
0.49	1.40
⋮	⋮
0.81	1..80

復習 (累積分布関数)

確率密度関数　累積分布関数

$$f(x) \overset{\text{積分}}{\to} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\mathrm{d}s = P(X < x)$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) \overset{\text{微分}}{\leftarrow} F(x)$$

定義 (と同値な性質)

連続型確率変数 Y に対して, $R = g(Y)$ も連続型確率変数で, R の母期待値や確率は Y の母期待値や確率から定まる. (簡単のため g は単調増加)

$$\mathrm{E}[\phi(R)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{R}}(r)\phi(r)\,\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{Y}}(y)\phi(g(y))\,\mathrm{d}y = \mathrm{E}[\phi(g(Y))].$$

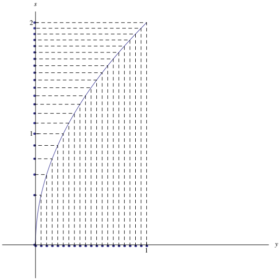
特に

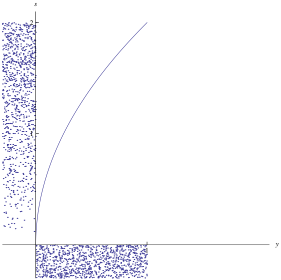
$$P(g(a) < R < g(b)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = \int_{a}^{b} f_{\mathrm{Y}}(y)\,\mathrm{d}y = P(a < Y < b).$$

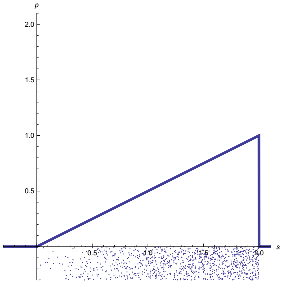
これまで $\mathrm{E}[aX+b]$ とか考えてたのは $Y = g(X) = aX + b$ を考えてたことに相当.

左辺をきかれたときの方針

- 右辺に直して計算する.
- R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めてから, 左辺で計算する.


s
2
1
y
1


s
2
1
y
1


p
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
s

確率密度関数の変換のおぼえ方

$r = g(q)$ を単調増加な関数とするとき，
$f_Q(q)\,\mathrm{d}q$ は変数変換しても不変:　$f_R(r)\,\mathrm{d}r = f_Q(q)\,\mathrm{d}q$

$$f_R(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}(q)} f_Q(q)$$

L09-Q2

Quiz(確率変数の変換)

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(Y) = \mathrm{e}^Y$ で定まる連続型確率変数 R を考える.

1. $\mathrm{E}[R], \mathrm{V}[R]$ を求めよう.
2. 母比率 (確率) $F_{\mathrm{R}}(r) = P(R < r)$ を求めよう.
3. R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.

この R に対応する擬似乱数を `double getuniform()` を使って生成するには?

L09-Q3

Quiz(確率変数の変換)

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(y) = (d-c)Y + c$ で定まる連続型確率変数 R を考える.
R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.

L09-Q4

Quiz(確率変数の変換)

正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数 X と, $R = g(X) = X^2$ で定まる連続型確率変数 R を考える.
R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.

ここまで来たよ

L09-Q5

Quiz(確率変数の変換)

あるクッキーマシンの作る正方形のクッキーの面積 (生地の量)Q は, 次の確率密度関数にしたがう (単位省略).

$$f_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (64 \leq q < 100) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

クッキーの一辺の長さは $R = g(Q) = \sqrt{Q}$ で与えられる (単位省略).

1. Q の母平均値と母分散を求めよう.
2. 確率 $P(Q > 82)$ を求めよう.
3. $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.
4. R の母平均値と母分散を求めよう (2 つの方法で).
5. 確率 $P(R > 9)$ を求めよう (2 つの方法で).

L09-Q6

Quiz(確率変数の変換)

ある氷製造マシンは, 一辺の長さが Q の立方体の氷を製造する. Q は確率密度関数

$$f_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (10 \leq q < 16) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう連続型確率変数である.
立方体の氷の体積 $R = g(Q) = Q^3$ もまた, 連続型確率変数である.
$16^2 = 256, 16^3 = 4096, 16^4 = 65536$ だが, 整数の四則演算やべき乗や分数は計算や約分や簡単化をせずにそのまま残してもよい.

1. 確率変数 R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.
2. 体積 R の母期待値を求めよう.
3. 体積 R が 2000 未満である確率を求めよう.

立方体の体積 R に相当する擬似乱数を生成するには?

ここまで来たよ

標準正規分布にしたがう乱数の生成

$R \sim \mathrm{U}(0,1)$ から, $X = g(R) \sim \mathrm{N}(0,1^2)$ となるような g があるといい. けどそんなうまい話はない. 正規分布の確率密度関数が積分できないから.
高レベル言語 Python, R などでは, 正規分布にしたがう乱数を生成する, ハイテクでブラックボックスな関数があるのでそれを利用.
サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本.

サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本

```
z<-rnorm(1000) # in R
```

サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本

```
import numpy # in Python
z=numpy.random.rand(1000)
```

サンプルサイズ 1 の標準正規分布にしたがう標本

```
norm.inv(rand(),0,1) // in Excel
```

サンプルサイズ 2 の標準正規分布にしたがう標本

```
/* Box-Muller 法 */
r=getuniform(); /* C*/
theta=getuniform();
z1=sqrt(-2*ln(r))*cos(2*M_PI*theta);
z2=sqrt(-2*ln(r))*sin(2*M_PI*theta);
```

サンプルサイズ 1 の標準正規分布にしたがう標本

```
z=0.0;  /*C*/
for(i=0;i<12;i++){
   z+=(getuniform()-0.5); /*右辺 U(0,1/12) */
}
/* 12が十分大きいと考え中心極限定理を不正確に適用 */
```

予習復習問題のやり方+今後の予定

しばらく情報メディアセンターの Moodle で `https://moodle.media.ryukoku.ac.jp`

Moodle App for iOS/Android

URL をきかれたら `https://moodle.media.ryukoku.ac.jp` で登録.