ランダムウォークの座標の確率分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L04(2021-04-29 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-06-28 Mon 16:27 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの $X(t)$ の初期条件と漸化式から, 小さい t に対して, 時刻 t に位置 x にいる確率 $p(x,t)$ を計算できる.
- $p(x,t)$ の初期条件と漸化式が書ける.

L03-Q1
Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. $\mu = \mathrm{E}[R(t)] = (-1)\cdot\frac{5}{9} + 0\cdot\frac{1}{9} + (+1)\cdot\frac{3}{9} = -\frac{2}{9}$.
2. $\mathrm{E}[(R(t))^2] = (-1)^2\cdot\frac{5}{9} + 0^2\cdot\frac{1}{9} + (+1)^2\cdot\frac{3}{9} = \frac{8}{9}$. $\mathrm{E}[R(t))^2] = (-\frac{2}{9})^2$.
   $\sigma^2 = \mathrm{V}[R(t)] = \mathrm{E}[(R(t))^2] - \mathrm{E}[R(t)]^2 = \frac{68}{81}$.
   次のように直接に計算しても同じ結果になる.
   $\mathrm{V}[R(t)] = \mathrm{E}[(R(t)-\mu)^2] =$
   $((-1)-(-\frac{2}{9}))^2\cdot\frac{5}{9} + (0-(-\frac{2}{9}))^2\cdot\frac{1}{9} + ((+1)-(-\frac{2}{9}))^2\cdot\frac{3}{9}$.
3. $\sigma_{R(t)} = \sqrt{\frac{68}{81}} = \frac{2\sqrt{17}}{9}$.
4. 一般に $\mathrm{E}[X(T)] = T\cdot\mathrm{E}[R(t))$. $T = 20$ とすると,
   $\mathrm{E}[X(20)] = 20\mathrm{E}[R(t)] = -\frac{40}{9}$.
5. 一般に $\mathrm{V}[X(T)] = T\cdot\mathrm{V}[R(t))$. $T = 20$ とすると,
   $\mathrm{V}[X(20)] = 20\mathrm{V}[R(t)] = \frac{1360}{81}$.
6. $\sigma_{X(20)} = (\mathrm{V}[X(20)])^{1/2} = (\frac{1360}{81})^{1/2} = \frac{4}{9}\sqrt{85}$

L03-Q2
Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. $R(-4) + \cdot + R(3) \sim \mathrm{B}(8, \frac{2}{3})$ が, 値 $5 - 2 = 3$ をとる確率を求める.
   $\binom{8}{3} (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^5$.
2. $\mathrm{E}[X(3)] = \mathrm{E}[X(-5) + R(-4) + \cdots + R(3)] = 2 + 8 \cdot \frac{2}{3}$.
3. $\mathrm{V}[X(3)] = \mathrm{V}[X(-5) + R(-4) + \cdots + R(3)] = 8 \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{3}$.
4. $\sqrt{8 \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{3}}$.

ここまで来たよ

4 ランダムウォークの座標の推定

4 ランダムウォークの座標の確率分布
- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式から $p(x,t)$ の値を求める

ランダムウォーク

ランダムウォークの定義

$R(t)$: 独立同分布に従う離散型確率変数. $t = 1, 2, 3, \ldots$
$X(t)$: 次で決まる確率変数.

初期条件 $X(a) = b$ (正確には $P(X(a) = b) = 1$)
漸化式 $X(t) = X(t-1) + R(t)$ $(t = a+1, a+2, a+3, \ldots)$

$R(t)$ が 二項分布 岩薩林 確率・統計 §3.4 $\mathrm{B}(1, p)$ にしたがうとき

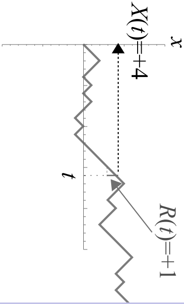
$$確率\ P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ q = 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

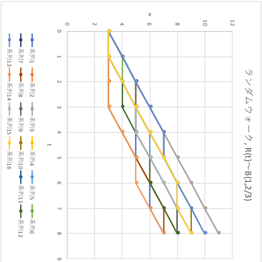
例 $p = \frac{2}{3}$.

日本語で言うと，

- x 軸上を移動するランダムウォーカーを考える $\rightsquigarrow X(t)$
- ウォーカーは，時刻 $t = a$ に，$x = b$ から出発する (確率が 1 である) $\rightsquigarrow P(X(a) = b) = 1$
- ウォーカーは各時刻に，確率 $\frac{2}{3}$ で $+1$ だけ移動し，確率 $\frac{1}{3}$ で移動しない $\rightsquigarrow X(t) = X(t-1) + R(t), R(t) \sim B(1, \frac{2}{3})$

$X(t)$：時刻 t のランダムウォーカーの座標 (を確率変数とみたもの)
$(X(0), X(1), X(2), \ldots, X(t))$:パス (path) (を確率変数とみたもの)





$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

L04-Q1

Quiz(ランダムウォークの座標の確率分布)

離散ランダムウォークで, $X(0) = 0$, $X(t) = X(t-1) + R(t)$,

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

とする $(0 < p < 1)$

1. $P(X(2) = x)$ を求めよう ($x = 0, 1, \ldots$ は整数).
2. $\mathrm{E}[X(2)]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X(2)]$ を求めよう.
4. $P(X(2) > 0)$ を求めよう.

cf. 二項分布 岩薩林 確率・統計 §3.4

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

ここまで来たよ

4 ランダムウォークの座標の推定

4 ランダムウォークの座標の確率分布
- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式から $p(x,t)$ の値を求める

確率分布 $p(x,t)$ の定義

$p(x,t)$ の定義

時刻 t に，ウォーカーが x にいる確率 $p(x,t) = P(X(t) = x)$.

離散型確率分布 $f(x) = p(x,t)$ (が t の種類だけたくさんある)

岩薩林 確率・統計 §3.1

性質 $\forall t \quad \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x,t) = 1$

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

$p(x,t)$ の漸化式

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 t に x にいるとき, 時刻 $t+1$ には, 確率 p で $x+1$ に移動し, 確率 $q=1-p$ で x にとどまる.

$\Downarrow$

$$X(t) = X(t-1) + R(t)$$

$$P(R(t)=r) = \begin{cases} p & (r=1) \\ q = 1-p & (r=0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率微分方程式的描像, ランジュバン方程式的描像

$\Downarrow$ 確率 (合計 1) だけど, x 軸上に合計 $N=1000$ 人いるかのように考えよう.

時刻 t に x にいる $N \times p(x,t)$ 人のうち, 時刻 t に, 平均的には

- x から $x+1$ に去るのは, $N \times p(x,t-1) \times p$ 人
- x から移動せず x にとどまるのは $N \times p(x,t-1) \times q$ 人

$X(t)$ の漸化式から $p(x,t)$ の漸化式を導きたい

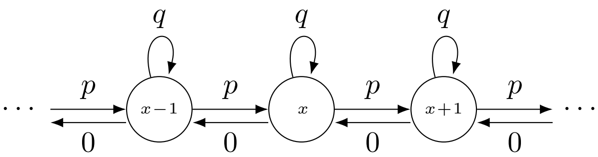
逆に考えると, 時刻 t に,

- $x-1$ から, x に来るのは, $\boxed{N \times p(x-1, t-1) \times p}$ 人
- x から移動せず x にいるのは, $\boxed{N \times p(x, t-1) \times q}$ 人

この合計が, t に x にいる人すべて $N \times p(x,t)$.

両辺のどこにも, 確率変数はなくなった!(確率はあるけど)

拡散方程式的描像, マスター方程式的描像, フォッカープランク方程式的描像



係数は t によらない.

計算で

条件付き確率

$$
\begin{aligned}
P(X(t)=x) =& \sum_y P(X(t)=x|X(t-1)=y)P(X(t-1)=y) \\
=& \cdots + 0 \\
& + P(X(t)=x|X(t-1)=x-1)P(X(t-1)=x-1) \\
& + P(X(t)=x|X(t-1)=x)P(X(t-1)=x) + 0 + \cdots \\
=& P(R(t)=1)P(X(t)=x-1) \\
& + P(R(t+1)=0)P(X(t)=x)
\end{aligned}
$$

L04-Q2

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=5$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動,
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動,
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない).

時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

ここまで来たよ

$p(x,t)$ の初期条件

運動の初期条件 $\Leftrightarrow$ 数列の初項

具体例で

「時刻 $t=2$ に $x=3$ から出発した」 (確率が 1)

$\Downarrow$

$$\boxed{P(X(2)=3)=1}$$

$X(t)$ の初期条件から $p(x,t)$ の初期条件を導きたい.

例 1

$t = 2$ には $x = 3$ にいる →

$X(2)$	$\cdots$	2	3	4	$\cdots$
確率	0	0	1	0	0

→ $p(x,2) = \boxed{\begin{cases} 1 & (x=3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}}$

例 2

$t = 1$ には $x = 0, 9$ に各 $\frac{1}{2}$ の確率でいる →

$X(1)$	$\cdots$	0	$\cdots$	9	$\cdots$
確率	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

→ $p(x,1) = \boxed{\begin{cases} \frac{1}{2} & (x=0) \\ \frac{1}{2} & (x=9) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}}$

L04-Q2(再掲)

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=5$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動,
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動,
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない).

時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

ここまで来たよ

4 ランダムウォークの座標の推定

4 ランダムウォークの座標の確率分布
- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式から $p(x,t)$ の値を求める

$p(x,t)$ を表で表現 I

$t\backslash x$	$\cdots$	0	$\cdots$	$x-1$	x	$x+1$	$\cdots$
$\vdots$			$\cdots$				$\cdots$
$t-1$				$p(x-1,t-1)$	$p(x,t-1)$	$p(x+1,t-1)$	
t				$p(x-1,t)$	$p(x,t)$	$p(x+1,t)$	
$\vdots$							

漸化式と初期条件から $p(x,t)$ を計算

L04-Q3

Quiz(ランダムウォークの確率 $p(x,t)$ の漸化式)

次の確率分布の漸化式と初期条件を考える. 空いてるセルをうめよう.

$$p(x,t) = \frac{2}{3}p(x-1,t-1) + \frac{1}{3}p(x,t-1), \quad p(x,0) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$t \backslash x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	x	$\cdots$
0	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
1	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
2	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
3	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
$\vdots$ t										$p(x,t)$	