

マルコフ連鎖

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L05(2021-05-06 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-06-28 Mon 16:28 JST hig"

今日の目標

- 転置確率行列, 確率ベクトルの定義を説明できる
- マルコフ連鎖の定義を説明できる
- 現象から転置推移確率行列を書ける
- 定常分布を求められる



L04-Q1

Quiz 解答:ランダムウォークの座標の確率分布

①

$$P(X(2) = x) = \begin{cases} p^0(1-p)^2 & (x = 0) \\ 2p^1(1-p)^1 & (x = 1) \\ p^2(1-p)^0 & (x = 2) \end{cases}$$

② $E[X(2)] = 2p.$

③ $V[X(2)] = 2p(1-p).$

④ $P(X(2) > 0) = E[I_{[X>0]}(X(2))] = 2p(1-p) + p^2.$

L05-Q2

Quiz 解答:離散的なランダムウォークの確率の漸化式

$$p(x, t) = \frac{1}{7} \times p(x - 2, t - 1) + \frac{2}{7} \times p(x, t - 1) + \frac{4}{7} \times p(x + 1, t - 1),$$

$$p(x, 5) = \begin{cases} 1 & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L05-Q3

Quiz 解答:離散的なランダムウォークの確率の漸化式

$$p(x, t) = \frac{1}{7} \times p(x - 2, t - 1) + \frac{2}{7} \times p(x, t - 1) + \frac{4}{7} \times p(x + 1, t - 1),$$

$$p(x, 5) = \begin{cases} 1 & (x = 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L05-Q4

Quiz 解答:ランダムウォークの確率 $p(x, t)$ の漸化式

空欄は 0.

$t \backslash x$...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	x	...
0	...				1			
1	...				$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		
2	...				$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	
3	...				$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

ここまで来たよ

5 ランダムウォークの座標の確率分布

5 マルコフ連鎖

- (復習) $p(x, t)$ の漸化式
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

ルールの $p(x, t)$ の漸化式への変換

「ランダムウォーカーは時刻 a に b から出発, が時刻 $t - 1$ に x にいるとき, 時刻 t には, 確率 p で $x + 1$ に, 確率 q で $x - 1$ に移動, 確率 $1 - p - q$ でその場にとどまる」

↓

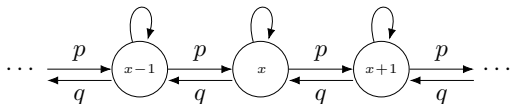
$$P(X(a) = b) = 1,$$

$$X(t) = X(t - 1) + R(t), \quad P(R(t) = r) = \begin{cases} q & (r = -1) \\ 1 - p - q & (r = 0) \\ p & (r = 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

↓

$$p(x, a) = \begin{cases} 1 & (x = b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

$$p(x, t) = p \cdot p(x - 1, t - 1) + (1 - p - q) \cdot p(x, t - 1) + q \cdot p(x + 1, t - 1).$$



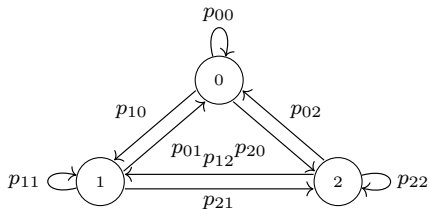
推移☒ 推移=transition

マルコフ連鎖の例 I

空間の移動でなく,
ウォーカー:猫 0:食べる 1:寝る 2:遊ぶ の
間の状態遷移と思ってもよい.

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$

状態 $x = 0$:食べる,...



推移確率

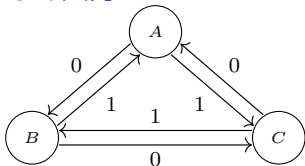
条件付き確率 確率統計☆演習 II(2018)L01

$$p_{\text{先元}} = p_{xy} = P(X(t) = x | X(t-1) = y)$$

上の量を, 世の中では p_{xy} でなく p_{yx} と
書くこともある.

マルコフ連鎖 「このような」状態空間と,
推移確率の組.

比較:オートマトンの状態遷移
図では, 矢印の数値は確率で
なく入力



$p(x, t)$ の漸化式

$$p(x, t) = p \cdot p(x-1, t-1) + (1-p-q) \cdot p(x, t-1) + q \cdot p(x+1, t-1)$$

$$p(0, t) = p_{00} \cdot p(0, t-1) + p_{01} \cdot p(1, t-1) + p_{02} \cdot p(2, t-1)$$

$$p(1, t) = p_{10} \cdot p(0, t-1) + p_{11} \cdot p(1, t-1) + p_{12} \cdot p(2, t-1)$$

$$p(2, t) = p_{20} \cdot p(0, t-1) + p_{21} \cdot p(1, t-1) + p_{22} \cdot p(2, t-1)$$

$$\begin{pmatrix} p(0, t) \\ p(1, t) \\ p(2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0, t-1) \\ p(1, t-1) \\ p(2, t-1) \end{pmatrix}$$

$$p(x, t) = \sum_{y=0,1,2} p_{xy} \cdot p(y, t-1). \quad (x=0, 1, 2)$$

転置推移確率行列 M , **分布**=ベクトル $\vec{p}(t)$ で書くと $(x, y$ が成分番号)

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1).$$

ベクトル $\vec{p}(t)$ は、先週の横 x , 縦 t の表の横 1 行に相当。

この漸化式を解くと, $\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1) = M^2\vec{p}(t-2) = \dots = M^t\vec{p}(0)$.

L05-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の推移確率行列)

$x = 0, 1, 2, 3$ 上のランダムウォークを考える.

時刻 $t = 0$ に $x = 1$ から出発する. 時刻 t に x にいたウォーカーは,

- 確率 $\frac{1}{7}$ で $x - 1$ に移動し
- 確率 $\frac{2}{7}$ で $x + 1$ に移動し
- 確率 $\frac{4}{7}$ で x にとどまる

ただし, 上のルールで, $x = 0$ から $x = -1$ に移動しようとしたら $x = 3$ に行く, $x = 3$ から $x = 4$ に移動しようとしたら $x = 0$ に行くとする. これをマルコフ連鎖としてとらえたとき,

- ① 推移図を書こう.
- ② 転置推移確率行列を書こう.
- ③ 時刻 $t = 0$ における分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき, $\vec{p}(1)$ を求めよう.

L05-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の推移確率行列)

$x = 0, 1, 2, 3$ 上のランダムウォークを考える.

時刻 $t = 0$ に $x = 1$ から出発する. 時刻 t に x にいたウォーカーは,

- 確率 $\frac{1}{7}$ で $x - 1$ に移動し
- 確率 $\frac{2}{7}$ で $x + 1$ に移動し
- 確率 $\frac{4}{7}$ で x にとどまる

ただし, 上のルールで, $x = 0$ から $x = -1$ や, $x = 3$ から $x = 4$ に移動しようとしたときは, 元の x にとどまるものとする.

これをマルコフ連鎖としてとらえたとき,

- ① 推移図を書こう.
- ② 転置推移確率行列を書こう.
- ③ 時刻 $t = 0$ における分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき, $\vec{p}(1)$ を求めよう.

ここまで来たよ

5 ランダムウォークの座標の確率分布

5 マルコフ連鎖

- (復習) $p(x, t)$ の漸化式
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

線形代数のりで確率ベクトル, 転置確率行列の言葉を準備!

非負ベクトル

m 次元ベクトル $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{pmatrix}$ が $p_i \geq 0$ を満たすとき, **非負ベクトル**という.

確率ベクトル

非負ベクトル $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{pmatrix}$ が, **規格化** $\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1$ を満たすとき, **確率ベクトル**という.

線形代数のりで確率ベクトル, 転置確率行列の言葉を準備 II

離散型確率分布 $f(x)$ は, 確率ベクトルと 1 対 1 に対応.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

非負行列 ($n \times m = 3 \times 2$ の例で)

実行列 $\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \\ p_{20} & p_{21} \end{pmatrix}$ が $p_{ij} \geq 0$ を満たすとき**非負行列**という.

転置確率行列

行列 $M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \\ p_{20} & p_{21} \end{pmatrix}$ の各列ベクトルが確率ベクトルであるとき, つまり

$\forall j \sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1$ であるとき, M を**転置確率行列**という.

推移確率行列

転置推移確率行列

マルコフ連鎖に現れる, 転置確率行列

$$M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

を, マルコフ連鎖の**転置推移確率行列**という. $m \times m$ 正方行列.

漸化式 $\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$ の解

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1) = M^2\vec{p}(t-2) = \cdots = M^t\vec{p}(0).$$

転置確率行列と確率ベクトルの積

M が転置確率行列, \vec{p} が確率ベクトルのとき, $M\vec{p}$ も確率ベクトル

証明:

確率過程とマルコフ連鎖

確率過程 時間 t に依存する確率変数

もちろん反復試行から来る独立な確率変数群 $R(t)$ も時間 t に依存するけど, 独立じゃない場合がおもしろい

離散時間マルコフ連鎖は, 次の性質を満たす確率過程.

離散時間 t が離散的. $t = 0, 1, 2, \dots$

マルコフ Markov $\vec{p}(t)$ が直前の時刻の分布 $\vec{p}(t-1)$ だけから決まる. 転置推移確率行列 p_{xy} で表現できる.

連鎖 chain 状態空間 $S \ni x$ が離散的.

いま考えてる, 時間空間離散のランダムウォークや猫は離散時間マルコフ連鎖の典型例.

離散時間マルコフ連鎖の (確率) 分布は, 確率ベクトルで表現できる.

離散時間マルコフ連鎖の遷移確率は, 転置確率行列で表現できる.

ここまで来たよ

5 ランダムウォークの座標の確率分布

5 マルコフ連鎖

- (復習) $p(x, t)$ の漸化式
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

定常分布

$\vec{p} = M\vec{p}$ となる分布 \vec{p} を **定常分布** という.

意味 **自分の言葉でどうぞ**

線形代数の言葉で言うと, 定常分布は, 転置推移確率行列 M

の **自分の言葉でどうぞ**

建設的心配性大爆発

- 定常分布っていつでもある? \rightsquigarrow Yes
- 固有値 (の絶対値) が 1 より大きな固有ベクトルはあるの? \rightsquigarrow No

状態数 m が有限のとき, **ペロン・フロベニウスの定理**から言える.

固有値 1 の存在

転置確率行列は 固有値 1 を持つ.

証明

分布の時間発展 I

L05-Q3

Quiz(マルコフ連鎖の時間発展)

状態空間 $\{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列は

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- ① 初期分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(1)$ を求めよう.
- ② 定常分布をすべて求めよう.
- ③ 上の初期分布のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ④ 上の初期分布のとき極限分布 $\vec{p}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t)$ と収束の様子 $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を調べよう.
- ⑤ 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

