マルコフ連鎖の確率と母期待値の時間発展

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L06(2021-05-13 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-05-07 Fri 09:13 JST hig"

今日の目標

- マルコフ連鎖の時間発展を求められる. さらに, 極限分布の有無, 収束の様子を説明できる
- マルコフ連鎖の状態に関する, 母期待値, 母比率を計算できる

L05-Q1

Quiz 解答:マルコフ連鎖の推移確率行列

推移図略.

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

L05-Q2

Quiz 解答:マルコフ連鎖の推移確率行列

推移図略.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここまで来たよ

6 マルコフ連鎖

6 マルコフ連鎖の確率と母期待値の時間発展
- マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
- 一般の場合:可約なマルコフ連鎖, 周期的なマルコフ連鎖

分布の時間発展 I

L06-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の時間発展)

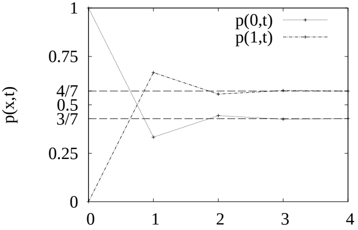
状態空間 $\{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える．転置推移確率行列は

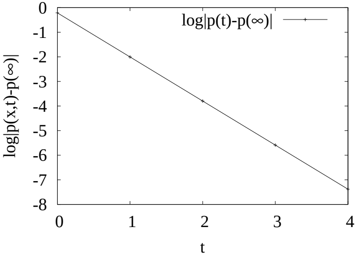
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. 初期分布 $\vec{p}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(1)$ を求めよう.
2. 定常分布をすべて求めよう.
3. 上の初期分布のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
4. 上の初期分布のとき極限分布 $\vec{p}(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \vec{p}(t)$ と収束の様子 $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を調べよう.
5. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

極限分布

(存在するなら) $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} \vec{p}(t)$ を極限分布という.




log|p(t)-p(∞)|
log|p(x,t)-p(∞)|
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
0
1
2
3
4
t

L06-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の定常分布)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $\{0,1,2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

なお, M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使ってよい.

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
3. 上のとき, $\log|\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ の $t \to +\infty$ の振る舞いを求めよう.

単純な場合でのマルコフ連鎖の時間発展 I

状態空間 $S = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖.
転置推移確率行列 M の固有値固有ベクトル $\lambda_i, \vec{u}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

仮定

絶対値の大きさの順に並べると (第 1, 第 2,. . ., 第 m 固有値とよぶ) 次のようになっているとする.

$$1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_m| \geq 0.$$

このとき, $\vec{u}_1$ は確率ベクトルにとれて, 解は,

$$\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2\lambda_2^t + a_3\vec{u}_3\lambda_3^t + \cdots + a_m\vec{u}_m\lambda_m^t.$$

$$\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2\lambda_2^t + a_3\vec{u}_3\lambda_3^t + \cdots + a_m\vec{u}_m\lambda_m^t.$$

この単純な場合の性質

- 第 1 固有値は 1. 転置推移確率行列の固有値には，いつでも 1 が含まれることを示したのだった. 先週の証明
- 第 1 固有ベクトル $\vec{u}_1$ は 定常分布. ペロン-フロベニウスの定理
- 極限分布 $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \vec{p}(t) = \vec{u}_1$.

自分の言葉でどうぞ

ちなみに，極限分布が存在するなら，それは必ず定常分布．なぜなら

自分の言葉でどうぞ

この単純な場合の性質の続き

- 第 2 以降の固有値の絶対値が 1 より小なので 自分の言葉でどうぞ 第 2 固有値の絶対値が小ささが，極限分布への収束の速さを決める
- 第 2 以降の固有ベクトルは 自分の言葉でどうぞ

これは単純な場合で，一般にはそうでない場合もある

- 単純である＝既約 (可約でない) かつ非周期的
- 単純でない一般的な場合＝可約または周期的

ここまで来たよ

6 マルコフ連鎖

6 マルコフ連鎖の確率と母期待値の時間発展
- マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
- 一般の場合:可約なマルコフ連鎖, 周期的なマルコフ連鎖

マルコフ連鎖での母期待値の計算

定義 $p(x,t) = P(X(t) = x)$ から,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\phi(X(t))] =& \sum_x \phi(x) f(x) = \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) p(x,t) \\ =& \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) (M^t \vec{p}(0))_x \\ =& (\phi(0)\phi(1)\cdots\phi(m-1)) M^t \vec{p}(0) \end{aligned}$$

母比率もこののりで.

L06-Q3

Quiz(マルコフ連鎖の母期待値の時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ, 状態空間 $S = \{x\} = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

初期分布を $\vec{p}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ とする

1. 母期待値 $\mathrm{E}[e^{X(t)}]$ を求めよう.
2. 条件 $X(t) > 0$ が成立する母比率を求めよう.

ここまで来たよ

6. マルコフ連鎖

6. マルコフ連鎖の確率と母期待値の時間発展
   - マルコフ連鎖の時間発展
   - マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
   - 一般の場合:可約なマルコフ連鎖, 周期的なマルコフ連鎖

一般の場合 1:可約なマルコフ連鎖 I

L06-Q4

Quiz(可約なマルコフ連鎖の定常状態)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
2. $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
3. 推移図を書こう.

Hint. 固有値 $\lambda = 1$(重解), $\frac{1}{3}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 使用可.

既約 (irreducible) なマルコフ連鎖=可約でないマルコフ連鎖

どの状態からどの状態へも, 確率 > 0 の矢印をたどって到達できるとき, マルコフ連鎖は (推移確率行列は) 既約であるという. 既約でないとき, 可約であるという. 可約なとき, 複数の定常分布が存在する. 極限分布は初期分布に依存する.

可約なマルコフ連鎖は, 既約なマルコフ連鎖に ‘分割して’ 考察すればよい.

一般の場合 2:周期的なマルコフ連鎖 I

L06-Q5

Quiz(マルコフ連鎖)

状態空間 $S=\{0,1,2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列 M は次.

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 任意の初期分布は定常分布に近づくか考えよう.
3. 推移図を描こう.

Hint: $\lambda_j=\omega^j=(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^j \quad (j=0,1,2)$ 固有ベクトル
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} s$

周期的な状態

$k > 1$ 回おきにしか自分に戻ってこない状態. 周期的な状態があると, 絶対値 1 の固有値が複数ある. このとき, 初期分布によっては極限分布がないことがある.

- 単純な場合=既約 (可約でない) かつ非周期的
- 一般の場合=可約または周期的

L06-Q6

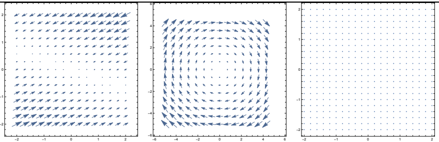
Quiz(周期的なマルコフ連鎖の定常状態)

次の転置推移確率行列をもつ, 状態空間 $S = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. マルコフ連鎖の定常分布を求めよう.
2. $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?
3. $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?

常微分方程式系とマルコフ連鎖☆

常微分方程式系 数理モデル II	マルコフ連鎖 計算科学
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}(t) = A\vec{p}(t)$	$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$ $\vec{p}(t) - \vec{p}(t-1) = (M-E)\vec{p}(t-1)$
$\vec{p}(t) = \mathrm{e}^{At}\vec{p}(0)$ $(\mathrm{e}^{A})^{t}$	$\vec{p}(t) = M^{t}\vec{p}(0)$ $(\mathrm{e}^{M-E})^{t} \simeq (E + (M-E))^{t} = M^{t}.$
A の固有値 θ の実部が 0 $\theta = a + bi$	M の固有値 $\lambda = \mathrm{e}^{\theta}$ の絶対値が 1 $\lambda = \mathrm{e}^{\theta} = \mathrm{e}^{a+bi}$
	典型的, 周期的, 可約