連続型擬似乱数と連続座標ランダムウォーク

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L09(2021-06-03 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-06-02 Wed 19:15 JST hig"

今日の目標

- 連続型一様分布 $\mathrm{U}(c, d)$ の擬似乱数を生成できる
- 連続座標の RW のプログラムが書ける
- RW の座標の母平均値母分散, 確率の近似値が

L08-Q1
L08-Q2
Quiz 解答:偏微分方程式の条件チェック
L08-Q3
Quiz 解答:偏微分方程式の条件チェック

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-18t}\sin(3x).$$

ここまで来たよ

9 偏微分方程式・ランダムウォークと拡散方程式

9 連続型擬似乱数と連続座標ランダムウォーク

- $U(c,d)$ にしたがう連続型一様擬似乱数の生成
- ランダムウォークの座標の母平均値と母分散

(復習) 離散型と連続型の確率変数

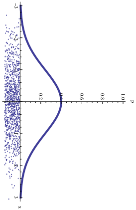
離散型:確率関数 岩薩林 確率・統計 §3

$f(r)$

得点 r	確率 $f(r)$
0	0.0667
1	0.2
2	0.3333
3	0.3
4	0.1

連続型:確率密度関数 岩薩林 確率・統計 §4

$f(r)$



確率密度関数

- $f(r)$ が大きいほど, その値 r が でやすい
- $0 \leq f(r)$.
- $f(r)$ は 1 を超えることもある.

連続型確率変数の母期待値 (復習)

母期待値の定義

岩薩林 確率・統計 §4.2　確率統計☆演習 I(2020)L07

離散型確率変数　$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_x f(x) \cdot \phi(x).$　$f(x)$:確率関数

連続型確率変数　$\mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \phi(x)\, \mathrm{d}x.$　$f(x)$:確率密度関数

母比率 (の一種)　$P(x_0 \le X \le x_1) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[x_0 \le X \le x_1]}(X)] = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, \mathrm{d}x.$

全事象の確率　$1 = \mathrm{E}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x.$

連続型一様分布 岩薩林 確率・統計 p.78 確率統計☆演習 I(2020)L07

連続型一様分布 $\mathrm{U}(c, d)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[c, d)$ の連続型一様分布 $\mathrm{U}(c, d)$ に従う ($X \sim \mathrm{U}(c, d)$) という.

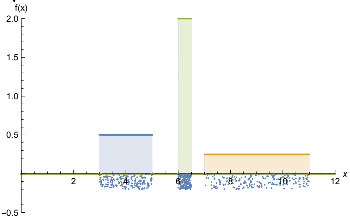
$$f(x) = \frac{1}{d-c}\mathrm{I}_{[c \le x < d]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \le x < d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$X \sim \mathrm{U}(c, d)$ のとき $\mathrm{E}[X] = \frac{c+d}{2}, \mathrm{V}[X] = \frac{(d-c)^2}{12}$.

$Y = aX + b$ の意味

X が 一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ にしたがうとき,
$Y = aX + b$ は 一様分布 $\mathrm{U}(ac+b, ad+b)$ にしたがう.

$\mathrm{E}[aX+b] =$
$\sqrt{\mathrm{V}[aX+b]} =$



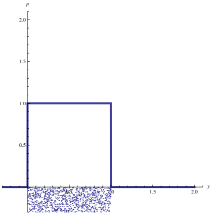
左から $X \sim \mathrm{U}(3,5)$, $Z = \frac{1}{4}X + \frac{21}{4}$, $Y = 2X + 1$.

連続型確率変数に対応する擬似乱数

例 連続型一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ 岩薩林 確率・統計 p.78

$Y \sim \mathrm{U}(0,1)$ の確率密度関数

$$f(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$



に対応する擬似乱数 ($[0,1)$ 一様乱数) は?

以後しばらく，Y と書いたら $Y \sim \mathrm{U}(0,1)$.

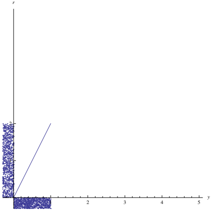
答: `double getuniform()` そのもの 計算科学☆実習 B(2021)L01

$[0,2)$ 一様乱数を作るには?

$R \sim \mathrm{U}(c,d)$ の乱数を作りたい. $R = g(Y)$ で $U(0,1)$ から作ろう.

$$f(r) = \begin{cases} \boxed{?} & (0 \le r < 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=???              ;
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```



y	r
0.31	0.62
0.82	1.64
0.49	0.98
0.04	0.08
0.60	1.20

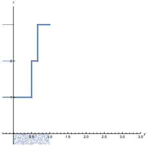
$$r = g(y) = \boxed{???}$$

離散型乱数の復習

今までは, Y を `int getrandom(double y)` で, 離散的な擬似乱数 R に '変換' していた.

R	確率
1	1/2
2	1/6
3	1/3

```c
int getrandom(double y){
  int r;
  if(y<3/6.0){
    r=1;
  }else if(y<(3+1)/6.0){
    r=2;
  }else{
    r=3;
  }
  return r;
}
```



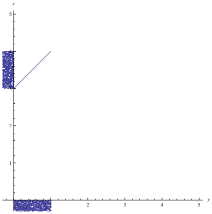
y	r
0.31	1
0.82	3
0.49	1
0.04	1
0.60	2

$$g(y) = \begin{cases} 1 & (0 \le y < 1/2) \\ 2 & (1/2 \le y < 2/3) \\ 3 & (2/3 \le y < 1) \end{cases}$$

$[3,4)$ 一様乱数を作るには?

$$f(r) = \begin{cases} \boxed{?} & (3 \le r < 4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=???            ;
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```

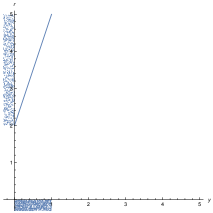


y	r
0.31	3.31
0.82	3.82
0.49	3.49
0.04	3.04
0.60	3.60

$r = g(y) = \boxed{???}$.

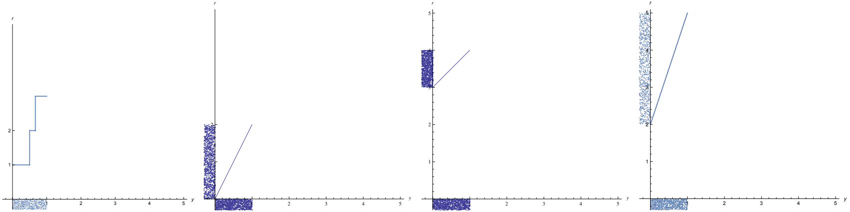
$[2,5)$ 一様乱数を作るには?

$$f(r)=\begin{cases}\frac{1}{3} & (2\le r<5)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$



$$r=g(y)=???$$

$g(y)$ の設計方法の解釈



自分の言葉でどうぞ

ここまで来たよ

9 偏微分方程式・ランダムウォークと拡散方程式

9 連続型擬似乱数と連続座標ランダムウォーク

- $U(c,d)$ にしたがう連続型一様擬似乱数の生成
- ランダムウォークの座標の母平均値と母分散

連続座標ランダムウォーク I

- x 軸上を移動するランダムウォーカーを考える
- ウォーカーは, 時刻 $t=0$ に, $x=b$ から出発する (確率が 1 である) ($t=a$ なら応じた修正).
- ウォーカーは各時刻に, 連続型確率変数 $R(t)$ だけ移動する

$R(t)$ の例 $R(t) \sim \mathrm{U}(c,d)$, $\mathrm{E}[R(t)] = \mu = \frac{c+d}{2}$, $\mathrm{V}[R(t)] = \sigma^2 = \frac{(d-c)^2}{12}$

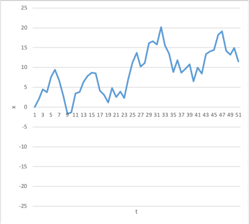
連続座標ランダムウォークの定義

ランダムウォークの座標 $X(t)$: 次で決まる確率変数. $t=0,1,2,\ldots$
$R(t)$: 独立同分布に従う (連続型) 確率変数. $t=1,2,\ldots$

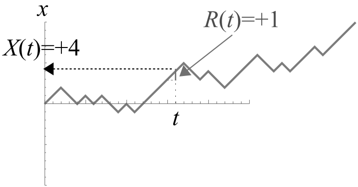
$$X(t) = X(t-1) + R(t), \qquad \text{初期条件 } P(X(0)=b) = 1$$

$X(T)$：時刻 T のランダムウォーカーの座標 (を確率変数とみたもの)
$(X(0), X(1), X(2), \ldots, X(T))$：パス (path) (を確率変数とみたもの)

連続座標ランダムウォーク



離散座標ランダムウォーク



連続/離散座標ランダムウォークの座標の母平均値と母分散

$$\begin{aligned} X(T) =& X(T-1) + R(T) \\ =& (X(T-2) + R(T-1)) + R(T) \\ =& \cdots = X(0) + R(1) + \cdots + R(T) \end{aligned}$$

$R(t)$ $(t = 1, \cdots, T)$: 独立同分布 確率統計☆演習 I(2020)L09.

連続/離散座標ランダムウォークの座標の母平均値/母分散 L03

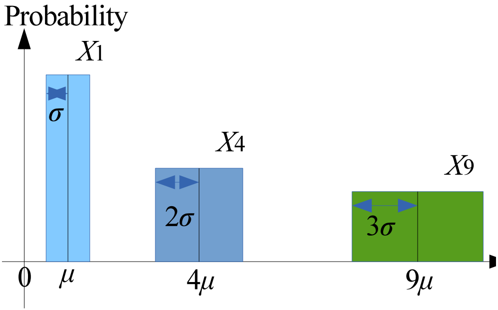
$P(X(0) = b) = 1$, $\mathrm{E}[R(t)] = \mu, \mathrm{V}[R(t)] = \sigma^2$ のとき,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X(T)] =& \mathrm{E}[X(0) + R(1) + \cdots + R(T)] = b + T\mu \quad (\text{同分布,E[] の性質}), \\ \mathrm{V}[X(T)] =& \mathrm{V}[X(0) + R(1) + \cdots + R(T)] \\ =& \mathrm{V}[b + R(1) + \cdots + R(T)] \quad (b \text{ は定数}) \\ =& T\sigma^2 \quad (\text{独立同分布, V[] の性質}) \end{aligned}$$

$X(t)$ $(t = 0, \cdots, T)$:独立でも同分布でもない.
$X(T) - b$ の母平均値は T に正比例, $X(T)$ の母分散は T に正比例.

$X(t)$ の母標準偏差 $= \sqrt{\mathrm{V}[X(T)]} =$ 自分で書いてね

ってことは，ランダムウォークの座標の確率分布の時間変化はこんな感じ？



中心極限定理 岩薩林 確率・統計 §4.4 確率統計☆演習 I(2020)L11

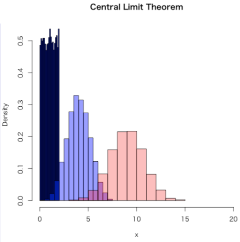
中心極限定理 (いいかげんバージョン)

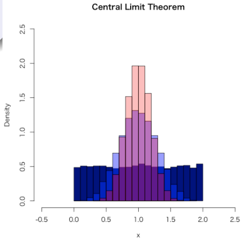
岩薩林 確率・統計定理 4.2

$X_1, \ldots, X_n$ が母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとき, $n \to +\infty$ で $U_n = X_1 + \cdots + X_n$, の確率分布は,

正規分布 $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$ に似る

ランダムウォークの場合.
$n \to T$, $X_i \to R(i)$. $U_n \to X(T)$
と思って適用できる.
問: さっきのランダムウォークの $X(T)$ の確率分布を描いて.





L09-Q1

Quiz(ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散)

時刻 $t=0$ に, $x=5$ から出発するランダムウォークの座標 $X(t)$ を考える. 座標の増分 $R(t)$ $(t=1,\ldots)$ は独立同分布にしたがう確率変数で次を満たす.

$$\mathrm{E}[R(t)]=-3, \mathrm{V}[R(t)]=5$$

1. $X(20)$ の母平均値を求めよう.
2. $X(20)$ の母分散を求めよう.
3. $X(20)$ と同じ母平均値と母分散を持つ正規分布の確率密度関数 $f_{20}(x)$ とグラフを書こう.
4. $X(20)\geq -40$ の母比率を標準正規分布の上側確率 $Q(u)$ または積分 $I(u)=\int_0^u f(z)\mathrm{d}z$ を使って近似的に表そう. $f(z)$ は標準正規分布の確率密度関数.