連続型確率変数の変換

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L10(2021-06-10 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-06-11 Fri 19:06 JST hig"

今日の目標

- 連続型確率変数の関数として定まる確率変数の母期待値を求められる
- 連続型確率変数の関数として定まる確率変数の確率密度関数を求められる

L09-Q1

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. $\mathrm{E}[X(20)] = \mathrm{E}[5 + R(1) + \cdots + R(20)] = 5 + 20 \times (-3) = -55.$
2. $\mathrm{V}[X(20)] = \mathrm{V}[5 + R(1) + \cdots + R(20)] \overset{\text{独立}}{=} 20 \times 5 = 100.$
3. $f_{20}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 100}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+55)^2}{2 \cdot 100}}.$
4. 「中心極限定理から」，近似的に $X(20) \sim \mathrm{N}(-55, 10^2)$. よって，$Z = \frac{X(20)+50}{10}$ とすると, $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$.
   よって, $P(X(20) \geq -40) = P(Z \geq \frac{-40-(-55)}{\sqrt{100}}) = Q(\frac{15}{10}) = Q(\frac{3}{2}) = I(\infty) - I(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - I(\frac{3}{2}).$

L10-Q1

Quiz(確率変数の変換)

あるクッキーマシンの作る正方形のクッキーの面積 (生地の量)Q は, 次の確率密度関数にしたがう (単位省略).

$$f_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (64 \leq q < 100) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

クッキーの一辺の長さは $R = g(Q) = \sqrt{Q}$ で与えられる (単位省略).

1. Q の母平均値と母分散を求めよう.
2. 確率 $P(Q > 82)$ を求めよう.
3. $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.
4. R の母平均値と母分散を求めよう (2 つの方法で).
5. 確率 $P(R > 9)$ を求めよう (2 つの方法で).

確率変数の関数 I

L10-Q2

Quiz(確率変数の変換)

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(Y) = 2\sqrt{Y}$ で定まる連続型確率変数 R を考える.

1. $\mathrm{E}[R], \mathrm{V}[R]$ を求めよう.
2. 母比率 (確率) $P(0.2 < R < 0.8)$ を求めよう.
3. 母比率 (確率) $F_{\mathrm{R}}(r) = P(R < r)$ を求めよう.
4. R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.

R の乱数生成は簡単.

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=2*sqrt(y);
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```

標本

y	$r = 2\sqrt{y}$
0.00	0.00
0.49	1.40
⋮	⋮
0.81	1..80

復習 (累積分布関数)

岩薩林 確率・統計 §4.1(4.4)(4.5)

確率密度関数　(累積) 分布関数

$$f(x) \overset{\text{積分}}{\rightarrow} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\mathrm{d}s = P(X < x)$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) \overset{\text{微分}}{\leftarrow} F(x)$$

確率変数の関数

連続型確率変数 Q に対して, $R = g(Q)$ も連続型確率変数で, R の母期待値や確率は Q の母期待値や確率から定まる. (簡単のため g は単調増加)

$$\mathrm{E}[\phi(R)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{R}}(r)\phi(r)\ \mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{Q}}(q)\phi(g(q))\ \mathrm{d}q = \mathrm{E}[\phi(g(Q))].$$

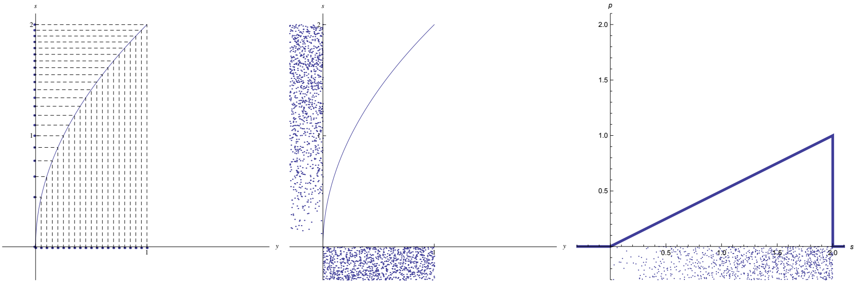
$$P(g(a) < R < g(b)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f_{\mathrm{R}}(r)\ \mathrm{d}r = \int_{a}^{b} f_{\mathrm{Q}}(q)\ \mathrm{d}q = P(a < Q < b).$$

これまで $\mathrm{E}[aX+b]$ とか考えてたのは $Q = g(X) = aX + b$ を考えてたことに相当. 岩薩林 確率・統計 (3.6)

$f_{\mathrm{Q}}(q)$ はわかってて, 左辺を求めろと言われたときの方針

- 右辺に直して計算する.
- R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めてから, 左辺で計算する.

Q	a	$\to$	b
R	$g(a)$	$\to$	$g(b)$


s
2
1
y
1
s
2
1
y
1
p
2.0
1.5
1.0
0.5
s
0.5
1.0
1.5
2.0

確率密度関数の変換のおぼえ方

$r = g(q)$ を単調増加な関数とするとき,
$f_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q$ は変数変換しても不変: $f_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = f_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q$

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}(q)} f_{\mathrm{Q}}(q)$$

L10-Q3

Quiz(確率変数の変換)

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(Y) = \mathrm{e}^Y$ で定まる連続型確率変数 R を考える.

1. $\mathrm{E}[R], \mathrm{V}[R]$ を求めよう.
2. 母比率 (確率) $F_{\mathrm{R}}(r) = P(R < r)$ を求めよう.
3. R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.

この R に対応する擬似乱数を `double getuniform()` を使って生成するには?

L10-Q4

Quiz(確率変数の変換)

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(y) = (d-c)Y + c$ で定まる連続型確率変数 R を考える.
R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.