# 逆関数法による擬似乱数生成

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L12(2021-06-24 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-06-18 Fri 11:47 JST hig"

## 今日の目標

- 逆関数法で, 一様分布以外の連続型確率変数の乱数が生成できる
- いろいろな処理系で, いろいろな確率分布にしたがう乱数が生成する方法を探せる

## L11-Q1
## Quiz 解答:サンプルパスの関数

```c
double phi(double path[], int tend){
  int t;
  double center=120;
  double xmin;
  xmin=path[0];

  for(t=1; t<=tend; t++){
    if( fabs(path[t]-center)<fabs(xmin-center) ){
      xmin=path[t];
    }
  }
  return xmin;
}
```

# ここまで来たよ

11 数理モデル, AR(m) モデル, ランダムウォークのパスの量の推定

12 逆関数法による擬似乱数生成
- 逆関数法による乱数生成
- 標準正規分布にしたがう乱数の生成

# 確率変数の関数

## 確率密度関数の変換のおぼえ方

$R, Q$ を確率変数，$f_{\mathrm{R}}, f_{\mathrm{Q}}$ を確率密度変数，$r = g(q)$ を単調増加な関数とするとき，$f_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q$ は変数変換しても不変: $f_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = f_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q$

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}(q)} f_{\mathrm{Q}}(q)$$

$$P(R < g(q)) = \int_{-\infty}^{g(q)} f_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{q} f_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q = P(Q < q)$$

## 逆関数法

$R, Q = Y \sim \mathrm{U}(0,1)$ について，上の式を解いて求めた $r = g(y)$ を使うと，ほしい確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ にしたがう $R$ を，連続型一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ にしたがう $Y$ から変換して生成できる．

L12-Q1

## Quiz(逆関数法)

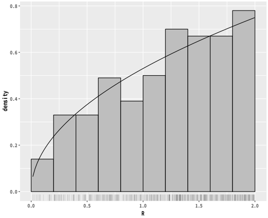
確率密度関数

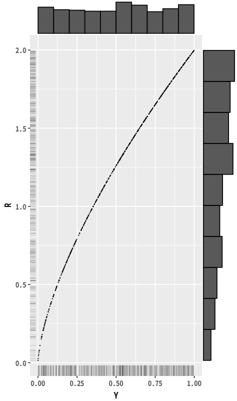
$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{r} & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 $R$ に対応する乱数を, $[0, 1)$ 一様乱数 $y$ から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

```
double getrandom(double y){
  return 2*pow(y,2.0/3);
}
```

## 出力



# L12-Q2

## Quiz(逆関数法)

確率密度関数

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (2 \leq r < 5) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 $R$ に対応する乱数を, $[0,1)$ 一様乱数 $y$ から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

L12-Q3

## Quiz(逆変換法による擬似乱数生成)

次の確率密度関数

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} -\frac{200}{21}\frac{1}{r^3} & (-5 \le r < -2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 $R$ に対応する乱数を, $[0,1)$ 一様乱数 $y$ から, 単調増加な $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

# ここまで来たよ

12 数理モデル, AR(m) モデル, ランダムウォークのパスの量の推定

12 逆関数法による擬似乱数生成
- 逆関数法による乱数生成
- 標準正規分布にしたがう乱数の生成

# 標準正規分布にしたがう乱数の生成

$Y \sim \mathrm{U}(0,1)$ から, $R = g(Y) \sim \mathrm{N}(0,1^2)$ となる $g$ が式で書けるといい．けどそんなうまい話はない．正規分布の確率密度関数は ‘積分できない.’
高レベル言語 Python, R などでは, 正規分布にしたがう乱数を生成する, ハイテクでブラックボックスな関数が備わってるのでそれを利用.
他の分布も備わってる．一様分布も getuniform() より**高品質**なものあり.

サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本

```
z<-rnorm(1000) # in R
```

サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本

```
import numpy # in Python
z=numpy.random.rand(1000)
```

サンプルサイズ 1 の標準正規分布にしたがう標本

```
norm.inv(rand(),0,1) // in Excel
```

# 正規乱数のブラックボックスな関数の中はどうなってるの?

## Jacobian $J$

微積分 II

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad J = \frac{\partial x \partial y}{\partial u \partial v}.$$

直交座標と極座標の場合

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

2 変数正規分布

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

2 つの確率変数の間の関係もこれ $\rightarrow$ 2 対 2 の逆関数法

## Box-Muller 法による標準正規乱数. 2 個セット

```
double r,theta,x,y;
r=getuniform();             /* U(0,1) */
theta=getuniform()*2*M_PI;  /* U(0,2Pi)*/
x=sqrt(-2*ln(r))*cos(theta);   /* N(0,1) */
y=sqrt(-2*ln(r))*sin(theta);   /* N(0,1) */
```

## この科目より後に, 乱数を使うときのアドバイス

言い訳 `int rand()` は `stdlib.h` に入ってるから C では OS やコンパイラによらず使える.. そのため, この授業では `int rand()` から `double getuniform()` を作って使ってきた. しかし, `rand()` は低品質.

**低品質**の意味は追って説明

一般的なおすすめ

各処理系に一様分布や主要な確率分布にしたがう乱数生成関数が最初から備わっている. 品質は様々.
Linux では `drand48()` が手軽でまあまあの品質.

- 近江崇宏先生 (東京大学) C 言語による乱数生成 `http://www.sat.t.u-tokyo.ac.jp/~omi/random_variables_generation.html`

MT=Mersenne Twister という数学的理論を使った高品質な乱数があれば/信頼できる 3rd party が提供していれば, それを使おう.　整数論 (離散数学)

- 松本真先生 (広島大学) Mersenne Twister