オイラー表現とラグランジュ表現

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L13(2021-07-01 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-06-24 Thu 14:27 JST hig"

今日の目標

- オイラー/ラグランジュ表現の特徴を説明できる
- ゲーム作成や現象の解析で, オイラー/ラグランジュ表現の特徴を活かして使い分けられる

L12-Q1

Quiz 解答:逆関数法

$0 \leq r < 2$, $0 \leq y < 1$ において,

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{r}\mathrm{d}r =& 1\mathrm{d}y\\ \frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{1}{3/2}r^{3/2} =& y + C\end{aligned}$$

$y = 0$ のとき $r = 0$ より, $C = 0$ で, $g(y) = 2y^{2/3}$. このとき $y = 1$ のとき $r = 2$ も自動的に満たされる.

L12-Q2

Quiz 解答:逆関数法

$2 \leq r < 5$, $0 \leq y < 1$ において,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\mathrm{d}r =& 1\mathrm{d}y\\ \frac{1}{3}r =& y + C\end{aligned}$$

$y=0$ のとき $r=2$ より, $C=2$ で, $g(y)=3y+2$. このとき $y=1$ のとき $r=5$ も自動的に満たされる.

L12-Q3

Quiz 解答:逆変換法による擬似乱数生成

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{R}}(r)\mathrm{d}r =& f_{\mathrm{Y}}(y)\mathrm{d}y \\ -\tfrac{200}{21}\frac{1}{r^3}\mathrm{d}r =& \mathrm{d}y \\ \tfrac{200}{21}\tfrac{1}{2}r^{-2} =& y+C \end{aligned}$$

$y=0$ のとき $r=-2$ より, $C=\frac{4}{21}$. $r^2=100(4+21y)^{-1}$.
$r=\pm[100(4+21y)^{-1}]^{1/2}$.
$r(0)=-5, r(1)=-2$ に注意すると, $r=g(y)=-10(4+21y)^{-1/2}$

ここまで来たよ

11 逆関数法による擬似乱数生成

11 オイラー表現とラグランジュ表現

- オイラー表現とラグランジュ表現

実習課題の振り返り:2 つのタイプがあった!

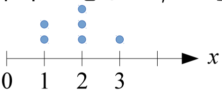
- マルコフ連鎖の数値計算
  - markov, ...
  - 母ナントカ: 厳密. 確率の式を 1 回だけ計算. $p(x, t)$ は確率

    フォッカー-プランク, マスター方程式, 拡散方程式, 熱方程式
  - たまたまオイラー表現: 場所ごとに確率をカウント
- 確率シミュレーション
  - rw, sim, contrw,...
  - 標本ナントカ: 標本サイズだけ乱数で実行を繰りかえして, 標本から推定. $X(t)$ は座標

    ランジュバン方程式
  - たまたまラグランジュ表現: ウォーカーごとに座標をカウント

ラグランジュ表現

確率は忘れて，ウォーカーが大勢いる状況をラグランジュ表現しよう．



数式的

$x^{(k)}(t)$: ウォーカー番号 k 番の，時刻 t の座標．
上の状況なら
$x^{(0)}(t)=1, x^{(1)}(t)=2, x^{(2)}(t)=2, x^{(3)}(t)=3, x^{(4)}(t)=1, x^{(5)}(t)=2.$

C 的

`x[k]` ウォーカー番号 k 番の座標 (時刻 t とともに，この変数を更新)

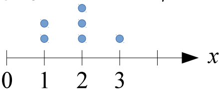
```
int x[6]; /*配列の宣言*/
```

または，

```
int x[]={1,2,2,3,1,2}; /*配列の宣言兼代入*/
```

オイラー表現

確率は忘れて，ウォーカーが大勢いる状況をオイラー表現しよう．



数式的

$P(x,t)$: 時刻 t に，座標 x にいるウォーカーの人数．
上の状況なら
$P(0,t)=0, P(1,t)=2, P(2,t)=3, P(3,t)=1, P(\text{他},t)=0.$

C 的

`P[x]` 座標 x にいるウォーカーの人数 (時刻 t とともに更新)
`int P[100];` /*配列の宣言．$100-1=x$ 座標の上限*/
または
`int P[]={0,2,3,1,0,0,...};` /*配列の宣言兼代入*/
マルコフ連鎖の計算で使ってる `double p[]` は「いわば」 $p=P/N$, $N=6$ がウォーカーの合計人数．

L13-Q1

Quiz(ラグランジュ表現とオイラー表現)

(座標が整数値のみをとる離散型の) ランダムウォークを考える.
6 羽のペンギンが, 座標 $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の範囲をランダムウォークする.
ある時刻 t に, $x = 1$ に 2 羽, $x = 3$ に 3 羽, $x = 8$ に 1 羽いるとする.

1. ラグランジュ表現を用いたとき, 配列 `x[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.
2. オイラー表現を用いたとき, 配列 `P[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.

配列のサイズとは, 元の型の変数を何個集めたかという個数. `int x[SIZE];` の `SIZE`.

ゲームプログラミング: シューティング, ブロック崩し, テトリス

https://www.mobygames.com/images/shots/l/919112-space-invaders-pc-98-screenshot-in-game-port-of-arcade-original.png Infemos (2018)

https://www.mobygames.com/images/shots/l/47642-super-breakout-atari-st-screenshot-breakout.gif Servo (2003)

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/ja/e/ed/Tetris_World_Rule.png

L13-Q2

Quiz(オイラー表現とラグランジュ表現)

次のゲームのオブジェクトのうち, オイラー表現に適したもの (=ラグランジュ表現に適していないもの) を答えよう.

1. シューティングの自機
2. シューティングのミサイル
3. シューティングの動かない雑魚キャラ
4. シューティングのボスキャラ
5. ブロック崩しのボール
6. ブロック崩しのラケット
7. ブロック崩しのブロック
8. テトリスの落下前のブロック
9. テトリスの落下後のブロック
10. 将棋の駒
11. 囲碁の石
12. オセロの駒

ラグランジュ表現とオイラー表現によるプログラムの比較

	ラグランジュ表現	オイラー表現
空間	なんでも	有限個の場所
ウォーカーの区別	あり	なし
ランダムウォーク		
得意な問		
シューティング ブロック崩し テトリス 将棋 囲碁 オセロ		

L13-Q3

Quiz(ラグランジュ表現)

ランダムウォークのラグランジュ表現で，時刻 t におけるウォーカーの座標 $X(t)$ の標本が配列 `x[SAMPLESIZE]` に格納されているとする.

```
#define SAMPLESIZE 6
double x[SAMPLESIZE];
```

1. 標本平均値 $\overline{X}$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.
2. $X(t) \leq 5$ の標本比率を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい.

L13-Q4

Quiz(オイラー表現)

ランダムウォークのオイラー表現，または，マルコフ連鎖の数値解法のプログラムで，時刻 t において ウォーカーの座標が $X(t) = x$ である確率 $p(x,t)$ が，すでに計算され，配列 `p[x]` に格納されているとする．ただし，$x = 0, 1, \ldots, 19$.

```
#define XMAX 20
double p[XMAX];
```

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X(t)]$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう．
2. 母比率 $P(X(t) \leq 5)$ を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう．

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい．

応用:2 次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:
Lichtenberg_figure_in_block_of_Plexiglas.jpg
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DLA_Cluster.JPG

DLA=Diffusion Limit Aggregation 拡散律速凝集のルール

- 原点に「枝の種」=吸収壁を置く
- 粒子をどこかに置いてランダムウォーク．粒子が枝に接触したらウォーク終了 (吸収壁)
  粒子は枝に固着する $\rightsquigarrow$ 吸収壁が成長
- 粒子をどこかに再度おいてランダムウォーク

フラクタル図形 1 次元と 2 次元の中間の図形　応用数理 A

P. Nathan https://www.youtube.com/watch?v=uBy3Uouy76Q

S. Higuchi https://www.youtube.com/watch?v=Y6F86ryRTGs

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク

```
x=0;
for(t){
  x+=getrandom(getuniform());
}
```

離散座標の場合に getrandom をばらして書くと

```
x=0;
for(t){
  z=getuniform(); /*[0,1)一様乱数. y座標と区別*/
  if(z<0.5){
    x+=1;
  } else {
    x-=1;
  }
}
```

 オイラー表現とラグランジュ表現

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク	x 軸上をランダムに移動	$X(t)$
2 次元ランダムウォーク	xy 平面上をランダムに移動	$(X(t), Y(t))$

離散座標

```
x=0;y=0;
for(t){
  z=getuniform();
  if(z<0.25){
    x+=1;
  } else if(z<0.5)
    x-=1;
  } else if(z<0.75)
    y+=1;
  } else {
    y-=1;
  }
}
```

連続座標．移動距離もランダムにしてもいい．

```
x=0.0;y=0.0;
for(t){
  z=getuniform();
  x+=cos(2*M_PI*z);
  y+=sin(2*M_PI*z);
}
```