時系列解析

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L14(2021-07-08 Thu)

最終更新: Time-stamp: ”2021-07-05 Mon 20:59 JST hig”

今日の目標

-
-

L13-Q1

Quiz 解答:ラグランジュ表現とオイラー表現

1. 6 羽なのでサイズは 6.
   各要素は, `x[]={1,1,3,3,3,8};` (順序はこうである必要はない. 自由にペンギン番号をつけてよい)
2. 座標が $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の計 10 か所なので, サイズは 10.
   各要素は `u[]={0,2,0,3,0,0,0,0,1,0};` (順序はこうである必要がある)

L13-Q2

Quiz 解答:オイラー表現とラグランジュ表現

(3),7,9,11,12

L13-Q3

Quiz 解答:ラグランジュ表現

```
double  ex,px;
int  k,sum=0,count=0;
for(k=0;k<SAMPLESIZE;k++){
   sum+=x[k];
   if(  x[k]<=5)  count++;
}
ex=(double)sum/SAMPLESIZE;
px=(double)count/SAMPLESIZE;
```

L13-Q4
Quiz 解答:オイラー表現

```
int  x;
double  ex=0.0,  px=0.0;
for(x=0;x<XMAX;x++){
   ex+=p[x]*x;
   if(x<=5)  px+=p[x];
}
```

ここまで来たよ

12 オイラー表現とラグランジュ表現

12 時系列解析
- 自己回帰モデル AR(m)
- 時系列解析

m 次の自己回帰モデル AR(m)

m 次の自己回帰モデル AR(m)

確率過程 $X(t)$. $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. 各 $X(t)$ は (連続型) 確率変数.

$$X(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k X(t-k) + R(t)$$

ただし, $R(t)$ は同分布にしたがい,

$$\mathrm{E}[R(t)] = 0, \qquad \text{WN1}$$

$$\mathrm{E}[R(t)R(s)] = \sigma^2 \times \delta_{t,s} = \sigma^2 \times \begin{cases} 1 & (t = s) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}, \qquad \text{WN2}$$

$$\mathrm{E}[R(t)X(s)] = 0 \quad (t > s). \qquad \text{PI}$$

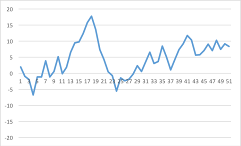
WN1, WN2 を満たす $R(t)$ を white noise, 白色雑音 という.
PI はジャンプ幅が場所によらない position-independent (よって壁はない) 条件.
AR=auto regression

自己回帰モデルで記述できそうな現象の例

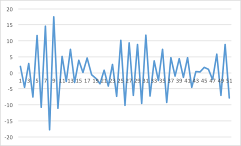
- $t=$ 日, $X(t)=$ 気温の, 平年平均気温との差, $0<\phi<1$.
- $t=$ シーズン, $X(t)=$ タイガースの勝率の 5 割との差, $-1<\phi<0$.

AR(1)

$\phi=0.9,\ \sigma=1$



$\phi=-0.9,\ \sigma=1$



AR(1) モデルとランダムウォーク

AR(1) $a_1 = \phi$ (一般の値).

```
for(t){/*AR(1)*/
  x=phi*x+getrandom(getuniform());
}
```

AR(1) で $\phi = 1$ で, $R(t)$ が独立とすると, ランダムウォークで $\mathrm{E}[R] = 0$ で, 壁がないものを実現できる.

```
for(t){/*ランダムウォーク*/
  x=x+getrandom(getuniform());
}
```

壁無し $\mathrm{E}[R] = 0$ ランダムウォーク $\subset$ AR(1) $\subset$ 自己回帰モデル $\subset$ 時系列

L14-Q1

Quiz(AR(1) モデルの例)

AR(1) モデルで, 出発点を $X(0) = 100.0$ とする. 得られた乱数の値を, $R(1) = 15.0, R(2) = -8.0$ とする. $X(1), X(2)$ を, 3 つの場合 $\phi = 1.0, 0.9, -0.9$ について求めよう.

ここまで来たよ

12 オイラー表現とラグランジュ表現

12 時系列解析
- 自己回帰モデル AR(m)
- 時系列解析

母自己共分散, 母自己相関係数

$X(t)$ 確率過程=時系列. $X(t)$ $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. 各 $X(t)$ は (連続型) 確率変数.
例: AR(m).
その実現値 時系列データ

母自己共分散, 母自己相関係数

$\mu(t) = \mathrm{E}[X(t)]$.
k 次の母自己共分散 $C_k(t) = \mathrm{E}[(X(t) - \mu(t))(X(t+k) - \mu(t+k))]$
$k = 0$ 次の母自己共分散 $C_0(t) = \mathrm{E}[(X(t) - \mu(t))^2]$=ふつうの母分散.

k をラグ lag という

復習:m 次の自己回帰モデル AR(m)

$X(t)$ 確率過程
$X(t)$ $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. 各 $X(t)$ は (連続型) 確率変数.

m 次の自己回帰モデル AR(m)

$$X(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k X(t-k) + R(t)$$

ただし, $R(t)$ は同分布にしたがい,

$$\mathrm{E}[R(t)] = 0, \qquad \text{WN1}$$

$$\mathrm{E}[R(t)R(s)] = \sigma^2 \times \delta_{t,s} = \sigma^2 \times \begin{cases} 1 & (t = s) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}, \qquad \text{WN2}$$

$$\mathrm{E}[R(t)X(s)] = 0 \quad (t > s). \qquad \text{PI}$$

AR(1) モデルの母自己共分散

$$
\begin{aligned}
X(t) =& \phi X(t-1) + R(t) \\
=& \phi(\phi X(t-2) + R(t-1)) + R(t) \\
=& \cdots = \phi^t X(0) + \phi^{t-1} R(1) + \cdots \phi R(t-1) + R(t). \\
\mathrm{E}[X(t)] =& \phi^t \mathrm{E}[X(0)].
\end{aligned}
$$

$|\phi| < 1$ なら $t \to +\infty$ で. $\mathrm{E}[X(t)] \to 0$. 以下, すべての t で $\mathrm{E}[X(t)] = 0$ と仮定.

$$
\begin{aligned}
C_k(t) =& \mathrm{E}[X(t)X(t+k)] = \mathrm{E}[(\phi^t X(0) + \phi^{t-1} R(1) + \cdots \phi R(t-1) + R(t)) \\
& \times (\phi^{t+k} X(0) + \phi^{t+k-1} R(1) + \cdots + \phi^{k+1} R(t-1) + \phi^k R(t) + \cdots + R(t+k))]
\end{aligned}
$$

展開すると対角項 $\mathrm{E}[X(0)X(0)]$ と $\mathrm{E}[R(t')R(t')]$ しか残らない

$$
=\phi^{2t+k}\mathrm{E}[X(0)X(0)] + (\phi^{2t-2} + \phi^{2t-4} + \cdots 1)\phi^k\sigma^2 = \phi^{2t+k}\mathrm{E}[X(0)X(0)] + \frac{1-(\phi^2)^t}{1-\phi^2}\phi^k\sigma^2
$$

$$
\overset{t\to\infty}{\to}
\begin{cases}
\frac{\phi^k\sigma^2}{1-\phi^2} & (|\phi| < 1) \quad \rightsquigarrow \text{定常過程} \\
(t\ \text{のように発散}) & (|\phi| = 1) \\
(t\phi^{2t}\ \text{のように発散}) & (|\phi| > 1)
\end{cases}
$$

AR(1) モデルの母自己相関係数

$|\phi| < 1$, $t \to +\infty$ で考える.

k 次の母自己共分散

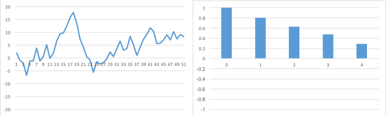
$$C_k(t) = \mathrm{E}[X(t)X(t+k)] = \phi^{2t}\mathrm{E}[X(0)X(0)] + \frac{1-(\phi^2)^t}{1-\phi^2}\phi^k\sigma^2$$

k 次の母自己相関係数 $t \to +\infty$ で

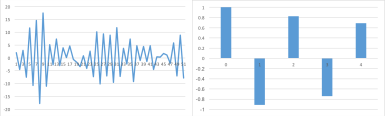
$$r_k(t) = \frac{\mathrm{Cov}[X(t), X(t+k)]}{\sqrt{\mathrm{V}[X(t)]}\sqrt{\mathrm{V}[X(t+k)]}} = \frac{C_k(t))}{\sqrt{C_0(t)}\sqrt{C_0(t+k)}} \to \phi^k.$$

実現値の, t-$X(t)$ グラフと k-r_k グラフ (コレログラム) の例

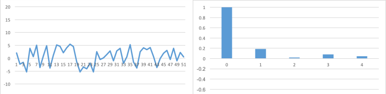
$\phi = 0.9$, $\sigma = 1$



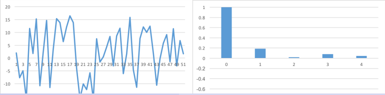
$\phi = -0.9$, $\sigma = 1$



$\phi = 0.2$, $\sigma = 1$



$\phi = 0.2$, $\sigma = 3$



定常過程

定常過程

確率過程 $X(t)$ が

- $\mathrm{E}[X(t)]$ が t によらない
- $\mathrm{E}[X(t)X(s)]$ が差 $t-s$ だけにより, t によらない

であるとき, 定常過程という.

要するに 自分の言葉でどうぞ

ある極限, たとえば $t \to \infty$ のみで定常過程であることはある.

- 一般のランダムウォークは定常過程 ではない
- AR(m) モデルが定常かどうかは a_k による.

定常な時系列データに対する標本ナントカ

‘時系列分析’ では, 定常過程について, 1 個の時系列データを, 一定の長さに分割して複数個のデータからなる標本のように扱うことが行われる.

横:t 縦:標本内のデータ番号. 標本自己相関係数を求めるとき

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n ＼ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	-0.2522	-1.4293	0.41339	[illegible]	[illegible]	0.05638	1.16461	0.77765
3	2	2	0.40156	-0.1803	1.02945	[illegible]	[illegible]	1.1405	0.1365	0.27561
4	3	2	1.74901	0.20238	-0.7695	[illegible]	[illegible]	0.66943	0.10917	1.30642
5	4	2	0.45349	-0.3762	-0.6185	[illegible]	[illegible]	-1.4453	0.09464	1.55283
6	5	2	1.01492	0.94089	-0.5959	[illegible]	[illegible]	0.5173	0.11447	1.38334
7	6	2	1.78265	1.70528	2.07552	[illegible]	[illegible]	0.10902	-0.7164	-1.1645
8	7	2	0.69062	1.27761	1.15377	[illegible]	[illegible]	0.24885	-1.323	-1.1454
9	8	2	0.74554	0.27013	1.05844	[illegible]	[illegible]	-0.0232	1.09015	1.91198
10	9	2	1.21618	-0.2882	0.81639	[illegible]	[illegible]	-1.1622	-1.5981	-2.3211
11	10	2	1.20421	-0.487	-0.2274	[illegible]	[illegible]	1.46621	0.13736	0.13426

本当はこういう標本が欲しい

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n ＼ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	-0.2522	-1.4293	0.41339	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	2	2	0.40156	-0.1803	1.02945	1.31571	-0.3059	1.1405	0.1365	0.27561
4	3	2	1.74901	0.20238	-0.7695	-1.3943	-0.0067	0.66943	0.10917	1.30642
5	4	2	0.45349	-0.3762	-0.6185	-1.7157	-0.461	-1.4453	0.09464	1.55283
6	5	2	1.01492	0.94089	-0.5959	-0.8685	0.30052	0.5173	0.11447	1.38334
7	6	2	1.78265	1.70528	2.07552	0.06083	0.429	0.10902	-0.7164	-1.1645
8	7	2	0.69062	1.27761	1.15377	1.44955	-0.4663	0.24885	-1.323	-1.1454
9	8	2	0.74554	0.27013	1.05844	-0.1876	0.06592	-0.0232	1.09015	1.91198
10	9	2	1.21618	-0.2882	0.81639	1.84743	0.18484	-1.1622	-1.5981	-2.3211
11	10	2	1.20421	-0.487	-0.2274	0.34252	0.62665	1.46621	0.13736	0.13426

定常ならこれでもいいじゃん

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n ＼ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2			2	-0.2522	-1.4293	0.41339	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	1	2	-0.2522	-1.4293	0.41339	0.93494	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	2	2	0.40156	-0.1803	1.02945	1.31571	-0.3059	1.1405	0.1365	0.27561
5	3	2	1.74901	0.20238	-0.7695	-1.3943	-0.0067	0.66943	0.10917	1.30642
6	4	2	0.45349	-0.3762	-0.6185	-1.7157	-0.461	-1.4453	0.09464	1.55283
7	5	2	1.01492	0.94089	-0.5959	-0.8685	0.30052	0.5173	0.11447	1.38334
8	6	2	1.78265	1.70528	2.07552	0.06083	0.429	0.10902	-0.7164	-1.1645
9	7	2	0.69062	1.27761	1.15377	1.44955	-0.4663	0.24885	-1.323	-1.1454
10	8	2	0.74554	0.27013	1.05844	-0.1876	0.06592	-0.0232	1.09015	1.91198
11	9	2	1.21618	-0.2882	0.81639	1.84743	0.18484	-1.1622	-1.5981	-2.3211

Excel 的にはこうやると楽