# ベクトルの内積

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L01(2024-04-10 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-09 Tue 17:36 JST hig"

今日の目標

- 授業の到達目標/合格条件を説明できる
- Mobius で学習できる
- 2,3 次元ベクトルの内積が計算できて利用できる



# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?

1 ベクトルの内積
  - ベクトルの表示と演算の復習
  - Mobius で問題演習
  - ベクトルの内積

# 線形代数とは?

## 到達目標 (アバウト)

- シラバスより
  - 行列の基本的な計算ができる。
  - ベクトルや直線などの図形の移動や拡大縮小が行列で表現できる。
  - 連立 1 次方程式を行列で表現し解くことができる。
- 教科書の前半の問題が何も見ないで楽勝で解ける.
- 教科書解読ベースで大学の数学の学び方ができる.

## 線形代数とは?

- ベクトルの続き. 2,3 次元でなく $n$ 次元. 行列 (例: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ ) も.
- 理系の学科はだいたい 1 年でやる.
- 線形代数と確率は人工知能, 機械学習の大前提.

## 数理のカリキュラムの中での線形代数

必修. 後続 線形代数及び演習 II. 数学, 現象,DS, 情報科学ぜんぶで必要.

# 科目ののり

- 週 2 回水 1 金 1.
- ノート PC 持参. 問題を解くための手書きノート用意.
- 毎朝 9:15–9:25? の小テスト 'Trial' をクリアしていく感じで.
- 次の情報基礎 (木 45) 以降, 連絡は Teams で. チームコード `dn4dwu5`
- 次回から `https://hig3.net` → LearnMoodle `https://learn.hig3.net` を使います **(2022 と違います)**
- 毎回出席を前提に進めます. 欠席の事前事後連絡不要. やむを得ない理由で欠席してピーナッツ的に成績的に考慮されたい場合は LearnMoodle から欠席届 (2 週後まで).

## 相談できるところ

- オフィスアワー樋口 前期火 4 木昼, 1-507 or Teams chat a00010
- Math ラウンジ (1 号館 5 階 1-536,538), だいたい昼休みは大学院生常駐. 数理 TM-Math ラウンジ ch on Teams.

# 科目の成績ののり

(シラバスより)

*100* ピーナツ=小テスト *75* ピーナツ $+$ 平常点 *25* ピーナツ

全学ルールで 60 ピーナッツ以上が合格です (履修要項参照). 成績は研究室配属や奨学金に影響することがあります.
(詳細)

小テスト *75* ピーナツ=*Trial*=前半 *15* 回 $\times 2+$ 後半 *15* 回 $\times 3$.
平常点 *25* ピーナッツ=*Mobius*+チーム課題+その他

当面ののり数回後からテキスト必須 加藤 線形代数 何ページの式 (99). それまで配布資料で. `https://hig3.net` からダウンロードできます.

# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?

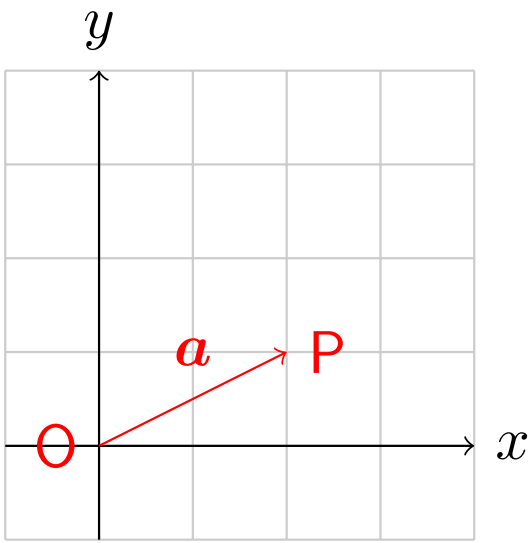
1. ベクトルの内積
   - ベクトルの表示と演算の復習
   - Mobius で問題演習
   - ベクトルの内積

# ベクトルの表示

ベクトルを $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ のように書く. **細字 $a$ でなく太字 $\boldsymbol{a}$ で. 手書きなら 2 重線で.** 成分は縦に並べて (横は別の意味がある). $3, 4, \ldots$ 次元ベクトルも同じ.

始点 を O, 終点 を P とする矢印を, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という.
平行移動して重なるベクトルは同じ.

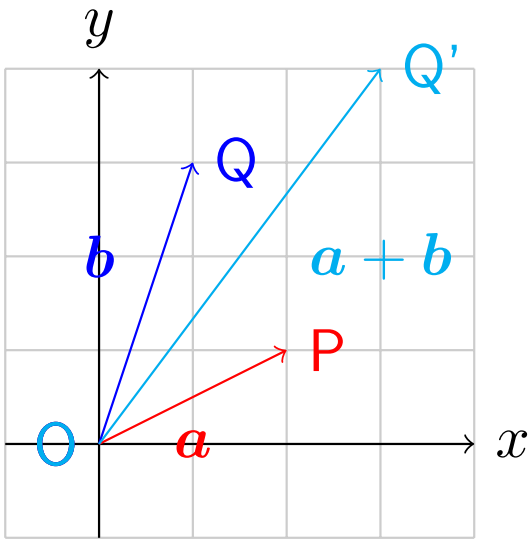
例えば $\mathrm{R}(2,5)$, $\mathrm{S}(4,6)$, なら,
$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2 が $x$ 成分, 1 が $y$ 成分.
教科書では角括弧 bracket [ ]. Web 教材は (). 翻訳して.



# ベクトルの和

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,
$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ'}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
のとき, ベクトルの和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は

$\mathrm{OP}, \mathrm{OQ}$ を 2 辺とする平行四辺形を作って, もう 1 個の頂点を $\mathrm{Q}'$ とすると, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

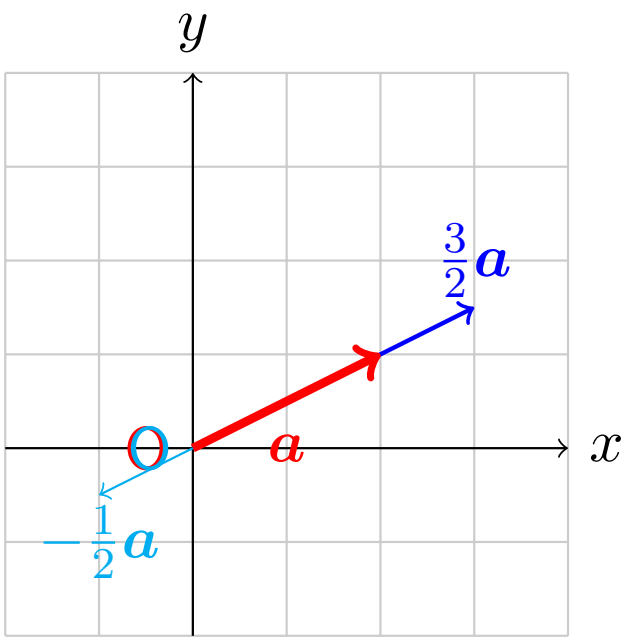



$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.
$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに加える.

# ベクトルの定数倍

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 実数 $k = 3$ に対して, ベクトルの定数倍 $k\boldsymbol{a}$ は長さが $\boldsymbol{a}$ の長さの $|k|$ 倍のベクトルで,
$k > 0$ なら $\boldsymbol{a}$ と同じ向き, $k < 0$ なら $\boldsymbol{a}$ と逆向き (反対向き),
$k = 0$ ならゼロベクトル $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

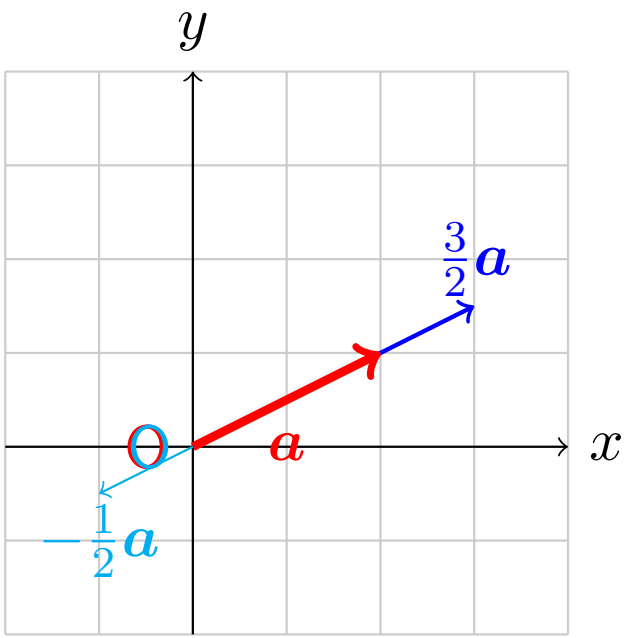
$k\boldsymbol{a} = k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot k \\ 1 \cdot k \end{bmatrix}$.
$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに $k$ 倍する.



# ベクトルの平行

## 定義 (ベクトルの平行)

零ベクトルでない $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が平行であるとは,
ある実数 $k$ が存在して
$k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とかけることをいう.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は, $k > 0$ なら同じ向き, $k < 0$ なら逆 (の) 向きという.



# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?
- 1 ベクトルの内積
  - ベクトルの表示と演算の復習
  - Mobius で問題演習
  - ベクトルの内積

# Mobius で問題演習

`https://mobius.st.ryukoku.ac.jp` または 龍谷 数学学習サポート で検索

Mobius にログイン. 初回はパスワードリセットが必要. 全学統合認証とは別のパスワードを設定.

フォローアップ課題 (4/19 まで) をやりたくなるけど, ぐっとこらえて線形代数.

数式入力方法

| | 数式 | Mobius(Maple) |
|---|---|---|
| ベクトル | $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ | `<2,-3>` |
| 分数 | $\frac{355}{133}$ | `355/133` |
| 平方根 | $\sqrt{3}$ | `sqrt(3)` |
| 積 | $2\sqrt{3}$ | `2*sqrt(3)` |

mobius L00 で入力練習, mobius L01 でベクトルの練習

# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?
- 1 ベクトルの内積
  - ベクトルの表示と演算の復習
  - Mobius で問題演習
  - ベクトルの内積

# ベクトルの内積

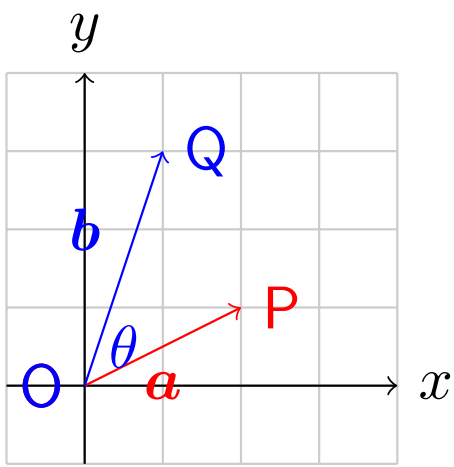
加藤 線形代数 §7

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}$ の長さを $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta$ とするとき,
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$
と定義する.

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 \times 1 + 1 \times 3$ のように定義する.

$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ と定義する.
$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ をベクトルの絶対値, 長さ という.




内積はスカラー積ともいう.

加藤 線形代数 §7.1 では,
内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,
絶対値 $|\boldsymbol{a}|$ をノルム $\|\boldsymbol{a}\|$,
という名前/記号で表している.

L01-Q1

## Quiz(ベクトルの内積)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ とする.

1. 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ を求めよう.
2. 絶対値 $|\boldsymbol{b}|$ を求めよう.
3. 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよう.
4. 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ を求めよう.

# 単位ベクトル

## 定義 (単位ベクトル)

ベクトル $\boldsymbol{a}$ が $|\boldsymbol{a}| = 1$ であるとき, $\boldsymbol{a}$ は単位ベクトルであるという.

## 命題

ベクトル $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{a}$ に平行な単位ベクトルは $\pm\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ である.
特に, 同じ向きの単位ベクトルが $+\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, 逆向きの単位ベクトルが $-\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ である.

証明 …
直観的説明 …

# ベクトルの直交

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$ が $\pi/2$ であるとき，または，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するという．

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するという．

# 次回

同じ教室．PC 持参．
Trial．出題計画は…
Mobius で練習しておいてね (最高点が記録)．今回は期限なし．

# ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L02(2024-04-12 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-12 Fri 06:45 JST hig"

今日の目標

- スカラー射影と正射影ベクトルが計算できる
- スカラー射影と正射影ベクトルを応用できる
- LearnMoodle で学習できる

L01-Q1

## Quiz 解答: ベクトルの内積

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 5.$
2. $|\boldsymbol{b}| = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b})^{1/2} = 1000^{1/2} = 10\sqrt{10}.$
3. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \cdot 30 + (-2) \cdot 10 = 10.$
4. $\boldsymbol{a} \cdot (2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 \cdot 10 + 10 = 20.$

# ここまで来たよ

1 ベクトルの内積

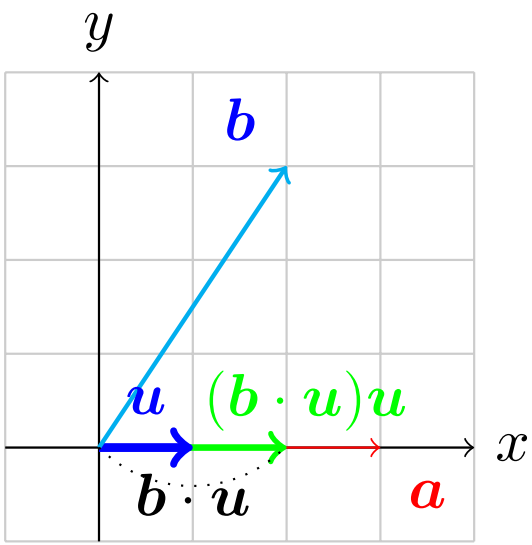
2 ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル
- 射影: スカラー射影と正射影ベクトル

# ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトル

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta$, $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

## 定義 (スカラー射影と正射影ベクトル)

ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影とは実数 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = |\boldsymbol{b}| \times 1 \times \cos\theta$. ($\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向き成分ともいう).
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトル (正射影) とは
$(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = (|\boldsymbol{b}| \times 1 \times \cos\theta)\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}$.

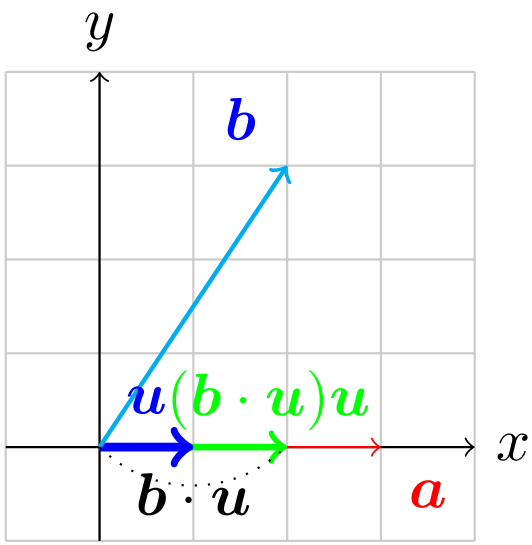


## 命題 (射影の性質)

- 正射影ベクトルの絶対値はスカラー射影の絶対値である.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \cdots$
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルは, 零ベクトルであるか, $\boldsymbol{a}$ と平行である (向きは内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の符号による).
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルとベクトル $\boldsymbol{b}$ の差は, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交する.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} - \boldsymbol{b} \quad = \cdots$

原点を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線に, $\boldsymbol{b}$ の終点から下ろした垂線の足を考える

- スカラー射影の絶対値を求めなさい $\Leftrightarrow$ 原点から垂線の足までの距離を求めなさい
- 正射影ベクトルを求めなさい $\Leftrightarrow$ 原点を始点，垂線の足を終点とするベクトルを求めなさい




**$\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影の意味:** 敵ゴールポストの向き $\boldsymbol{a}$ に進みたい人にとって, キック $\boldsymbol{b}$ はどのくらい意味 (符号つきの長さ) があるか?

**$\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルの意味:** 敵ゴールポストの向き $\boldsymbol{a}$ に進みたい人にとって, キック $\boldsymbol{b}$ をゴールポスト向きでいうとどういうベクトルか?

L02-Q1

## Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルを求めよう.
3. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影を求めよう.
4. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルを求めよう.
5. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ へのスカラー射影を求めよう.
6. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ への正射影ベクトルを求めよう.

L02-Q2

## Quiz(ベクトルの射影)

北が $y$ 軸の正の向き, 東が $x$ 軸の正の向きであるような座標系を取る.

1. 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
2. 北西向き (北と西の中間 45° の向き) の単位ベクトルを成分表示で書こう.
3. 北西向きに 3km 進んだ. このベクトルを $\boldsymbol{b}$ とする. これは, 北向き $\boldsymbol{a}$ にはどれだけ進んだことになる?
4. 北向きに 2km, 次に東向きに 1km 進んだ. このベクトルを $\boldsymbol{b}'$ とする. これは, 北西向き $\boldsymbol{a}'$ にはどれだけ進んだことになる?

Hint. $\boldsymbol{b}$ の，$\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影.

L02-Q3

## Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が $y$ 軸の正の向き, 東が $x$ 軸の正の向きであるような座標系を取る.
あるサッカーコートのサイドラインは, 自陣の端 $\mathrm{F} = \begin{bmatrix} -30 \\ -45 \end{bmatrix}$, 敵陣の端 $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 30 \\ 45 \end{bmatrix}$ である (単位は m)
以下いずれも電卓使用可だけど小数じゃなく厳密な答で.

1. ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の長さを求めよう. 単位をつけて答えよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
3. 味方のフォワードが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ まで運んだ. このフォワードは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか, 単位をつけて答えよう (近づけたなら正, 遠ざけたなら負で).
4. 味方のミッドフィールダーが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} -30 \\ 10 \end{bmatrix}$ までドリブルした. このミッドフィールダーは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか, 単位をつけて答えよう (近づけたなら正, 遠ざけたなら負で).

Hint …の…へのスカラー射影

## Moodle

https://hig3.net 

→ LearnMoodle https://learn.hig3.net

→ 'Google account Ryukoku' に y{2024}....@mail.ryukoku.ac.jp でログイン

→ 線形代数☆演習 (2024)

Moodle は Manaba の仲間. LMS=Learning Management System. 世界的には高等教育では Moodle のシェアが大きい.

# ベクトルの外積

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L03(2024-04-17 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-17 Wed 06:25 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.265 3 次元のベクトルの外積が計算できて利用できる

## L02-Q1

## Quiz 解答: ベクトルの射影と向き成分

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは
   $\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルは $-\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{-1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \frac{-1}{\sqrt{6^2+2^2}}\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$.
3. $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
4. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.
5. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
6. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$.

## L02-Q2

## Quiz 解答: ベクトルの射影

1. $\boldsymbol{u}_{\mathrm{S}} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$.
2. $\boldsymbol{u}_{\mathrm{NW}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

3. 北向きの単位ベクトルは $\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = 3\boldsymbol{u}_{\mathrm{NW}} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
4. $\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{NW}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{NW}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

## 命題 (射影の性質)

- 正射影ベクトルの絶対値はスカラー射影の絶対値である.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \cdots$
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルは, 零ベクトルであるか, $\boldsymbol{a}$ と平行である (向きは内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の符号による).
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルとベクトル $\boldsymbol{b}$ の差は, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交する.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} - \boldsymbol{b} \quad = \cdots$

原点を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線に, $\boldsymbol{b}$ の終点から下ろした垂線の足を考える

- スカラー射影の絶対値を求めなさい $\Leftrightarrow$ 原点から垂線の足までの距離を求めなさい
- 正射影ベクトルを求めなさい $\Leftrightarrow$ 原点を始点，垂線の足を終点とするベクトルを求めなさい

# ここまで来たよ

2 ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

3 ベクトルの外積
- 3 次元の座標系と基本ベクトル
- 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)
- スカラー 3 重積

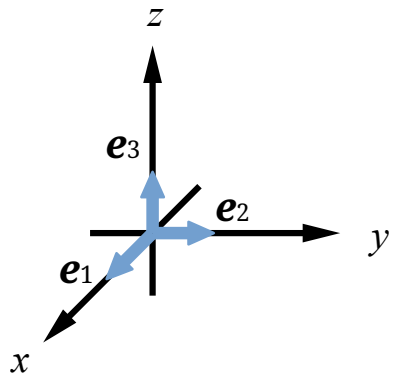
# 3 次元の座標系と基本ベクトル

## 定義 (基本ベクトル)

3 次元の

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形の 3 つのベクトルを基本ベクトルという. 加藤 線形代数 p.25




右手系

$x$ 軸は手前向け

$x$: 親指, $y$: 人差し指, $z$: 中指

## 命題 (基本ベクトルの性質)

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

## 定義 (クロネッカーのデルタ記号)

加藤 線形代数 p.25

$$\delta_{ij} \overset{\text{定義}}{=} \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

‘同じなら 1, 違ったら 0’

# ここまで来たよ

2 ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

3 ベクトルの外積
- 3 次元の座標系と基本ベクトル
- 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)
- スカラー 3 重積

# 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

加藤 線形代数 §7. 研究

## 定義 (外積)

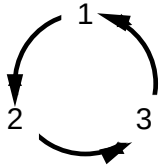
2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のことを外積という.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}$$

この記号 ‘×’ は新しい記号. (実数のふつうの ‘かける’ とたまたま同じ文字).

1 成分覚えれば, あとは, $1, 2, 3$ つまり $x, y, z$ が循環的 (cyclic) に入れ替わってることに注意.

$1 \to 2 \to 3 \to 1$.



別の書き方

$$(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3)$$
$$\overset{!}{=}(a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3$$

例 $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3.$

## 外積の成分表示の覚え方

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \\ & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 \end{array}$$

L03-Q1

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

1. 外積 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ を求めよう.
2. 外積 $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ を求めよう.
3. 外積 $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ を求めよう.

mobius L03

### 計算方法

ふつうの数であるかのように展開してよい.

$$\text{超注意 } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \text{よって} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c},$$

$$(c\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = c \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

$$\text{計算例} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

# 外積の図形的な意味

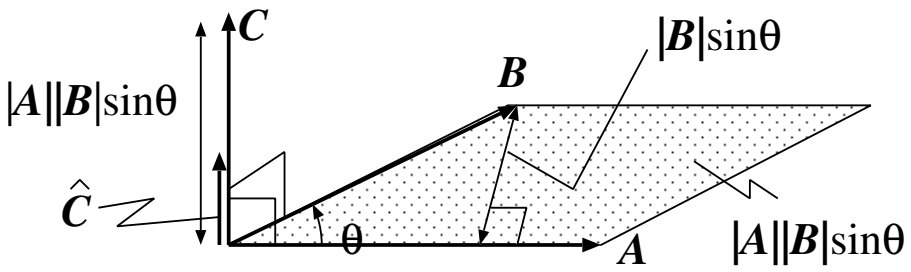
$$\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,(\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{c}}}$$

ただし, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{c}} = \hat{\boldsymbol{C}}$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルで, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{c}} \rangle$ が右手系をなす ( 右手の形 $\langle$親指, 人差し指, 中指$\rangle = \langle \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} \rangle$ を $\pi$ を越えて開かずに得られる) もの.

別の言い方

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$

$\boldsymbol{c}$ の向きは, $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に回る右ねじが進む向き.




大きさは $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta =$ ($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ のはる平行四辺形の面積).

- 力のモーメント $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.

例

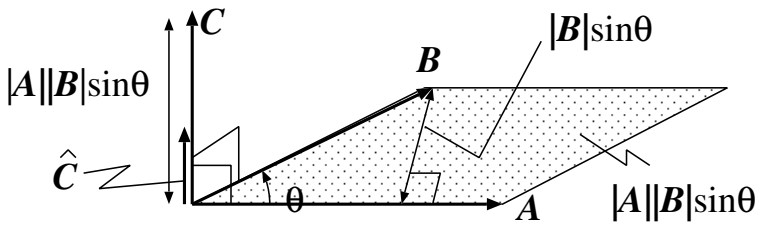
$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = ?$

$\boldsymbol{e}_1 \times (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = ?$

## 外積ってけっきょく何?

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のはった網みたいなもの

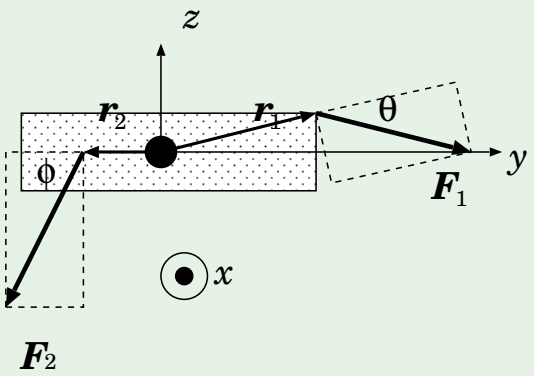
- 2 本の棒 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり平行四辺形の面積が $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- 剛体の力学のトルク=力のモーメント $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.



L03-Q2

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

原点を中心に回転するやじろべえを考える. $\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を, $\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を加える. 右の図 (ベクトルは正確じゃないです) のように $x$ 軸の正の向きから見たとき, やじろべえは時計回り, 反時計回りどちらに回るか考えよう.



L03-Q3

## Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

# ここまで来たよ

2 ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

3 ベクトルの外積
- 3 次元の座標系と基本ベクトル
- 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)
- スカラー 3 重積

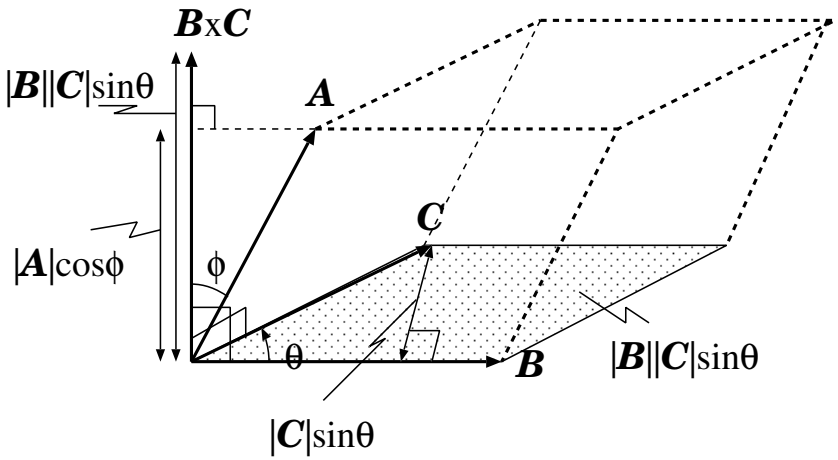
# スカラー 3 重積

外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

をスカラー 3 重積という. ($|\boldsymbol{abc}|$ ともかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)
図形的に考えると, 絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする

平行六面体の体積.



L03-Q4

## Quiz(ベクトルとスカラーの演算)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトル, $k$ をスカラー (ふつうの 1 個の実数のこと) とする.
次の式 (の計算結果) を, スカラー, 3 次元ベクトル, 間違った式に分類しよう.

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$
3. $(\boldsymbol{a} \cdot k) \times \boldsymbol{b}$
4. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot k\boldsymbol{c}$
5. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

# 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L04(2024-04-19 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-24 Wed 13:15 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.183 直線のパラメタ表示を説明できる
- 加藤 線形代数 p.183 法線ベクトルを用いた直線の方程式が説明できる

L03-Q1

## Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-5)-4\cdot(-2) \\ -2\cdot(-6)-(-5)\cdot 1 \\ 1\cdot 4+(-6)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$.
2. $-\begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$.
3. **0**.

L03-Q2

L03-Q3

## Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積

右手の中指の理想的な (親指人差し指と直交する) 向きは，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$.

右手だとする．このとき，上で求めた向きと，問題文の実際の右手中指の向きのなす角は $\frac{\pi}{2}$ 未満であるはず．

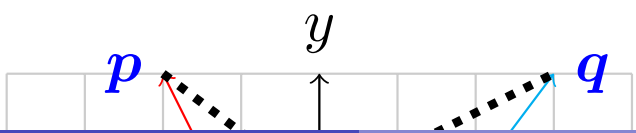
しかし，内積 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} < 0$ なので，矛盾．よって左手．

## 命題 (射影の性質)

- 正射影ベクトルの絶対値はスカラー射影の絶対値である.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \cdots$
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルは, 零ベクトルであるか, $\boldsymbol{a}$ と平行である (向きは内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の符号による).
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルとベクトル $\boldsymbol{b}$ の差は, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交する.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} - \boldsymbol{b} \quad = \cdots$

原点を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線に, $\boldsymbol{b}$ の終点から下ろした垂線の足を考える

- スカラー射影の絶対値を求めなさい $\Leftrightarrow$ 原点から垂線の足までの距離を求めなさい
- 正射影ベクトルを求めなさい $\Leftrightarrow$ 原点を始点，垂線の足を終点とするベクトルを求めなさい



# ここまで来たよ

3 ベクトルの外積

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 直線のパラメタ表示と方程式

# 平面内の直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183

## $\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に平行な直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ $\quad (t \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

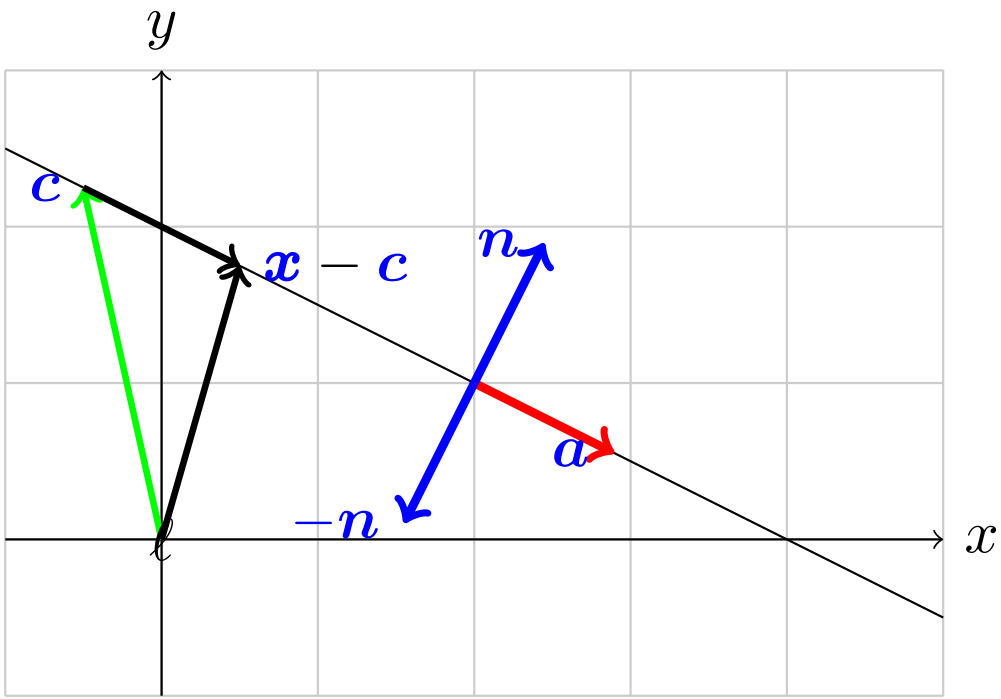
$\boldsymbol{a}$ を直線の接 (線) ベクトルという.

理由

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ として成分で書くと,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$




GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

平面内の直線のパラメタ表示

https://www.geogebra.org/m/skj88vSN

## 射影による理解

$\boldsymbol{x}$ が直線上にあるための必要十分条件は，
$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}$ の，$\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルが，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}$ のままであること．

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{u}_a)\boldsymbol{u}_a &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) \\
\text{スカラー } ((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{u}_a) \text{ を } k\in\mathbb{R} \text{ とおくと} k\boldsymbol{u}_a &= \boldsymbol{x}-\boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{x} &= k\boldsymbol{u}_a+\boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{x} &= k\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} \\
t=\frac{k}{|\boldsymbol{a}|} \text{ とおくと}, \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{a}t+\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

# パラメタ表示とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ を固定して, $t$ を実数全体を動かしたとき, $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ は直線全体を動く.
このとき, $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ を直線のパラメタ (媒介変数) 表示, $t$ をパラメタ (媒介変数) という.
$\mathbb{R}$ 実数全体, $\mathbb{R}^2$ 2 次元ベクトル全体=平面

1 つの直線には複数の媒介変数表示がある.
例: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$ はすべて同じ直線を表す.

L04-Q1

## Quiz(直線のパラメタ表示)

ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に平行で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ を通る直線を考える.
直線のパラメタ表示を何個か作ろう（ベクトルで）.

## 点が, パラメタ表示された直線上にあるかどうかの判定

点 $\boldsymbol{x}_0$ と, パラメタ表示された直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ を考える.
$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ となる $t$ がひとつでも存在すれば, この $t$ についての方程式に解 $t$ が存在すれば, $\boldsymbol{x}_0$ は直線上にある.

L04-Q2

## Quiz(直線のパラメタ表示)

次のパラメタ表示を持つ平面上の直線を考える．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

点 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$ はそれぞれ直線上にあるか，判定しよう．

mobius　L04.1

# 平面上の直線のベクトル方程式

**$\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{n}(\neq \boldsymbol{0})$ と垂直な直線のベクトル方程式** 加藤 線形代数 p.183

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

$\boldsymbol{n}$ を直線の法 (線) ベクトルという.

理由

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{n}$ に垂直である

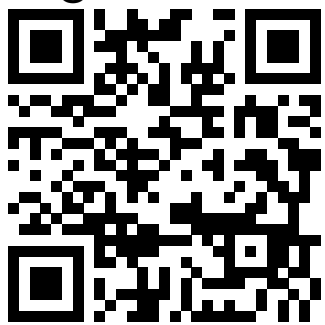
$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ (実数の定数) とおくと,

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} - C = 0 \qquad (C\text{は定数})$$

となる. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ として成分で書くと,

$$ax + by - C = 0.$$

https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P



射影による理解

$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}$ の，$\boldsymbol{n}$ へのスカラー射影が $0$ とも見られる．

# (ベクトル) 方程式とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | f(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

となるような (条件) 式 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ のこと.

直線には, 同値な複数の方程式の形がある.
例: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} - C = 0$, $\boldsymbol{x} \cdot (2\boldsymbol{n}) - 2C = 0$, $\boldsymbol{x} \cdot (-\boldsymbol{n}) + C = 0$ はすべて同じ直線を表す.

L04-Q3

## Quiz(直線のベクトル方程式)

ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に垂直で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ を通る直線を考える.
直線の方程式を求めよう.

mobius L04.1

## 垂直なベクトル

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ に垂直で同じ長さのベクトルは，$\pm\boldsymbol{n} = \pm \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$.

たしかに $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0, |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{n}|$ になってる.

## 点が, 方程式で表された直線上にあるかどうかの判定

点 $\boldsymbol{x}_0$ と, 方程式 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ を考える.
$f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立すれば $\boldsymbol{x}_0$ は直線上にある.

L04-Q4

## Quiz(直線の方程式と点)

次の平面上の直線の方程式を考える.

$$2x + 3y - 19 = 0.$$

点 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ直線上にあるか，判定しよう.

パラメタ表示から機械的に方程式を求める

パラメタ $t$ を消去する.

方程式から機械的にパラメタ表示を求める

いつでもうまくいく方法はない…

平面上の直線の場合はこの方法で.

$x$ 座標を $t$ とおいて $y$ 座標を $t$ で表す. $f(t)$ となったとする.

$$\begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} (t \in \mathbb{R})$$

が直線のパラメタ表示.

意味や図を考える方法

どちらで与えられるにせよ, いったん図を描き, その直線のパラメタ表示や方程式を考える.

直線の場合, 接線ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ から, それに直交する法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ と求める方法 (およびその逆) がある.

L04-Q5

## Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

1. 次のようにパラメタ表示される直線の方程式を求めよう.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. 次の方程式で表される直線のパラメタ表示を作ろう.

$$5x - 2y - 10 = 0$$

L04-Q6

## Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

1. ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に平行で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ を通る直線のパラメタ表示と方程式を求めよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に垂直で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}$ を通る直線のパラメタ表示と方程式を求めよう.

# スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L05(2024-04-24 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-24 Wed 13:24 JST hig"

今日の目標

- スカラー 3 重積を計算し，利用できる
- 平面上・空間内の直線のパラメタ表示を説明できる
- 空間内の平面のパラメタ表示，ベクトル方程式を説明できる

## L04-Q1

### Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}\text{はパラメタ})$$

## L04-Q2

### Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる $t$ が存在しないので, 直線上にない.
2. $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 29 \end{bmatrix}$ となる $t$ が存在しないので, 直線上にない.
3. $t = 2$ とすると 、$\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$ となるので, 直線上にある.

## L04-Q3

### Quiz 解答: 直線のベクトル方程式

方程式は,

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

すなわち,

$$3x + y - 22 = 0$$

## L04-Q4

### Quiz 解答: 直線の方程式と点

1. 代入すると方程式が満たされないので, 直線上にない.
2. 代入すると方程式が満たされるので, 直線上にある.

## L04-Q5

### Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

1. 接線ベクトルが $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. これと直交する法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ は法線ベクトル.
よってベクトル方程式は

$$\left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.$$

2. 法線ベクトルは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. これと直交する接線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ は接線ベクトル.
また, 点 $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ は直線上にあることがわかる.
よってパラメタ表示は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

L04-Q6

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

1. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (t\text{はパラメタ})$$

2. 法線ベクトルのひとつは $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. よって, 直線の方程式は

$$(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$(x-5) - 3(y-7) = 0$$

3. 直線と平行なベクトルのひとつは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. よってパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

方程式は

$$(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$3(x-3) + (y-13) = 0.$$

# ここまで来たよ

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 空間内の直線のパラメタ表示
- スカラー 3 重積
- 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

# 空間内または平面内の直線のパラメタ表示

**$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}$ に平行な直線のパラメタ表示** 加藤 線形代数 p.183

$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ $\quad (t \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

GeoGebra(動的幾何ソフトウェア)

2D `https://www.geogebra.org/m/skj88vSN`

3D `https://www.geogebra.org/m/KYg7AZ7M`

**空間 (3 次元) のとき**，パラメタ表示は，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$a_1, a_2, a_3 \neq 0$ の場合，$t$ を消去すると，見たことのある方程式になる．

$$\frac{x - c_1}{a_1} = \frac{x - c_2}{a_2} = \frac{x - c_3}{a_3}.$$

$a_i = 0$ の場合は個別に考える必要がある．

**$x$ 軸のパラメタ表示とベクトル方程式**

$x$ 軸のパラメタ表示とベクトル方程式を求めよう．

**空間 (3 次元) のとき**，平面上の直線の方程式 $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0$ の形は，実は空間内の平面の方程式であって，**空間内の直線の方程式ではない**（式の個数が違う）

# ここまで来たよ

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

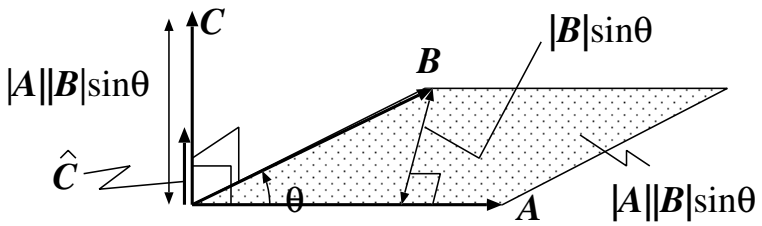
5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 空間内の直線のパラメタ表示
- スカラー 3 重積
- 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

# 外積の直観的意味

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =$ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のはる平行四辺形の面積と向き

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張った漁業用網の効率を伝えるもの

- 2 本の棒 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり 平行四辺形の面積 が $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- フレミングの左手の法則とか, これで簡単に書ける. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.



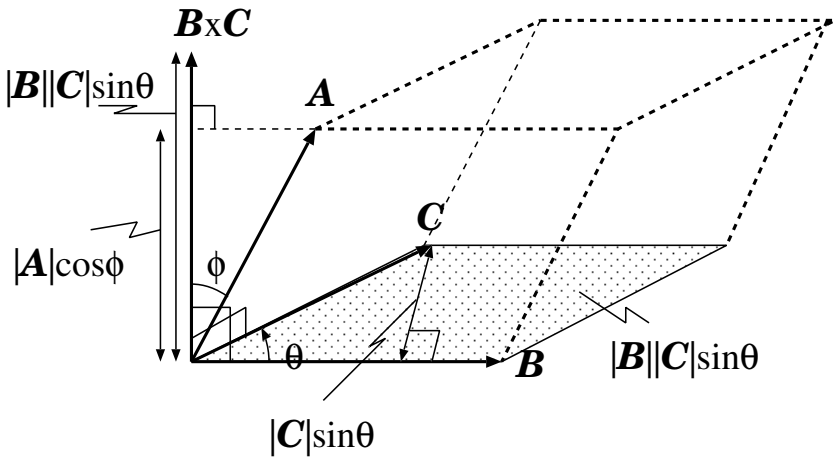
# スカラー 3 重積

外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

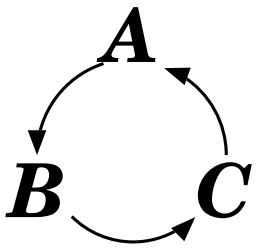
$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

をスカラー 3 重積という. ($|\boldsymbol{abc}|$ ともかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)
図形的に考えると, 絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする

平行六面体の体積.



体積だから, 絶対値 $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の順序を変更しても等しい.
じゃあ絶対値を取る前の符号は等しい?
実は, 順序を循環的に変えたときは $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の符号も同じ.




1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号が逆になる.
右手の指で言うと, **中** $\cdot$ (**親** $\times$ **人**) $> 0$.
右手系の座標系では $\boldsymbol{e}_z\cdot(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y) > 0$. 左手だと逆符号.
符号つき体積

行列式 線形代数☆演習 I(2024)L25?

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -1\times(-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = -1\times\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

mobius L05

L05-Q1

## Quiz(内積・外積・スカラー 3 重積)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ を考える.

1. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のなす角を $\theta$ とするとき $\sin\theta$ を求めよう. これを利用して, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよう.
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を, 外積で求めよう.
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を, 図形的に求めよう.
4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を, スカラー 3 重積で求めよう.

L05-Q2

## Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

L05-Q3

## Quiz(ベクトルとスカラーの演算)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトル, $k$ をスカラー (ふつうの 1 個の実数のこと) とする.
次の式 (の計算結果) を, スカラー, 3 次元ベクトル, 間違った式に分類しよう.

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$
3. $(\boldsymbol{a} \cdot k) \times \boldsymbol{b}$
4. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot k\boldsymbol{c}$
5. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

# ここまで来たよ

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 空間内の直線のパラメタ表示
- スカラー 3 重積
- 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

# (空間内の) 平面のパラメタ表示

## $\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面のパラメタ表示

加藤 線形代数 p.184

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s$$

すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s + \boldsymbol{c}$　　$(t, s \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行でない.

https://www.geogebra.org/m/YHmGKuJN

L05-Q4

## Quiz(平面のパラメタ表示とベクトル方程式)

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ に平行な平面を考える.

1. パラメタ表示を求めよう
2. ベクトル方程式を求めよう
3. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面上にあるか，パラメタ表示から調べよう.
4. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面上にあるか，ベクトル方程式から調べよう.

# 空間内の平面のベクトル方程式

平面と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \boldsymbol{0}$) を, 平面の法 (線) ベクトル normal vector という.

**$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{n}(\neq \boldsymbol{0})$ に垂直な平面のベクトル方程式** 加藤 線形代数 p.184

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0$$

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ とおくと,

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = C$$

$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C.$$

2D `https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P`
3D `https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2`

平面に平行な (しかし互いに平行ではない)2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられたとき，ひとつの法ベクトルは外積 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で得られる.
このとき，平面のベクトル方程式は，スカラー 3 重積が 0 という式

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

になっている.
$\boldsymbol{x}$ が平面上にあるとは，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平行六面体がつぶれて面積 0 になり，3 個のベクトルが平面内にあること.

L05-Q5

## Quiz(平面の方程式)

1. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ であり, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう.
2. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう.

mobius　L06

# 空間内の平面・直線の共通部分

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L06(2024-04-26 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-26 Fri 06:28 JST hig"

今日の目標

- 空間内の平面・直線のパラメタ表示と方程式との間の書き替えができる
- 空間内の平面・直線の共通部分を求められる
- 空間内の平面・直線を描ける

## Quiz

3 次元空間における $x$ 軸のパラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad (t \in \mathbb{R})$，方程式 $y = z = 0$.

L05-Q1

## Quiz 解答: 内積・外積・スカラー 3 重積

1. $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$. $\theta = \frac{3}{4}\pi$. $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$. $\sqrt{5}\sqrt{10}(1/\sqrt{2}) = 5$.
2. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = 5$.
3. $5 \times 3 = 15$.
4. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 15$.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の順序を循環的に変えたとき, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の符号も絶対値も同じ.
1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号は逆になる.
右手の指で言うと，**中** $\cdot$ (**親** $\times$ **人**) $> 0$.
右手系の座標系では $\boldsymbol{e}_z \cdot (\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y) > 0$. 左手だと逆符号.

L05-Q2

Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積　　右手の中指の理想的な (親指人差し指と直交する) 向きは，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$.
右手だとする．このとき，上で求めた向きと，問題文の実際の右手中指の向きのなす角は $\frac{\pi}{2}$ 未満であるはず.
しかし，内積 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} < 0$ なので，矛盾．よって左手.

L05-Q3

Quiz 解答: ベクトルとスカラーの演算

1. へん
2. スカラー

3. ベクトル
4. スカラー
5. ベクトル

# ここまで来たよ

5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 空間内の平面・直線の共通部分
- 空間内の平面
- 共通部分
- 右手系・左手系

# 空間内の平面のベクトル方程式

平面と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \boldsymbol{0}$) を, 平面の法 (線) ベクトル normal vector という.

**$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{n}(\neq \boldsymbol{0})$ に垂直な平面のベクトル方程式** 加藤 線形代数 p.184

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ とおくと,

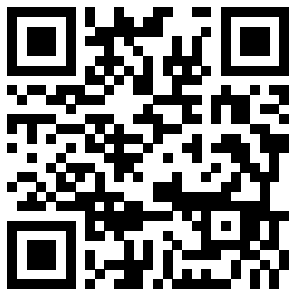
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = C$$

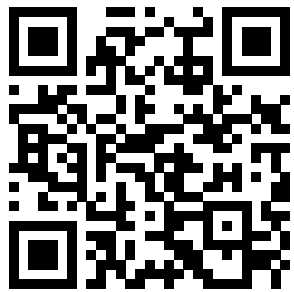
$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C.$$

2D `https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P`

3D `https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2`





# 平面のパラメタ表示，接ベクトルから方程式

平面の接ベクトル (平面に平行なベクトル) で, 互いに平行ではない 2 つ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられたとする.

- たとえば，パラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s + \boldsymbol{c}$ の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がその例

このとき，平面のひとつの法ベクトルは外積 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で得られる.
よって，平面のベクトル方程式は，スカラー 3 重積が 0 という式

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

になっている.
$\boldsymbol{x}$ が平面上にあるとは，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平行六面体がつぶれて体積 0 になり，3 個のベクトルが平面内にあること.

L06-Q1

## Quiz(平面の方程式)

1. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ であり, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう.
2. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう.

mobius L06

L06-Q2

## Quiz(平面のパラメタ表示とベクトル方程式)

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ に平行な平面を考える.

1. パラメタ表示を求めよう
2. ベクトル方程式を求めよう
3. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面上にあるか，パラメタ表示から調べよう.
4. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面上にあるか，ベクトル方程式から調べよう.

# ここまで来たよ

5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 空間内の平面・直線の共通部分
- 空間内の平面
- 共通部分
- 右手系・左手系

# パラメタ表示と方程式の関係

部分集合（図形，例えば直線や平面）の
パラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(t, s) \quad (t, s \in \mathbb{R})$
方程式 $f_1(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) = \cdots = 0$
とする．

$$\begin{aligned} \text{部分集合 (図形)} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \text{ある } t, s \in \mathbb{R} \text{ で} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(t, s) \text{とかける}\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | f_1(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) = \cdots = 0\} \end{aligned}$$

このとき，$f_1(\boldsymbol{p}(t, s)) = f_2(\boldsymbol{x}(t, s)) = \cdots = 0$ が成立．

2 つの図形の共通部分を求めるには？
部分集合 1= $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \text{条件 1}\}$.
部分集合 2= $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \text{条件 2}\}$.
部分集合 1 と部分集合 2 の共通部分 = $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \text{条件 1かつ条件 2}\}$.

# 直線と平面の共通部分の求め方 (例 1)

L06-Q3

## Quiz(パラメタ表示された直線と，方程式で表された平面の共通部分)

空間内で，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ とパラメタ表示される直線と，
方程式 $f(\boldsymbol{x}) = z + 1 = 0$ で表される平面との，共通部分を求めよう．

# 直線と平面の共通部分の求め方 (例 2)

L06-Q4

**Quiz(方程式で表された直線と，パラメタ表示された平面の交点)**

空間内で，方程式 $x-18=y-15=0$ で表される直線と，
$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}(t,s)=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}6\\4\\3\end{bmatrix}$ とパラメタ表示される平面との共通部分を求めよう．

# ここまで来たよ

5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 空間内の平面・直線の共通部分
- 空間内の平面
- 共通部分
- 右手系・左手系

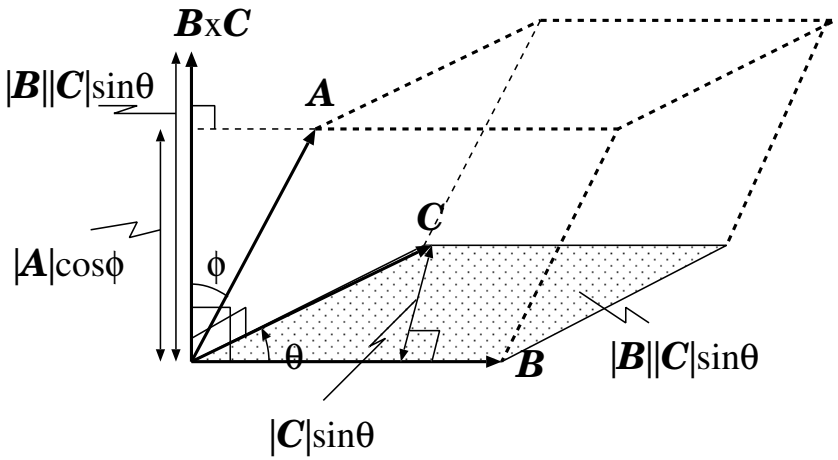
# スカラー 3 重積

外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

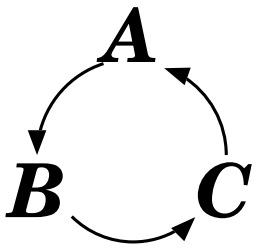
$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

をスカラー 3 重積という. ($|\boldsymbol{abc}|$ ともかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)
図形的に考えると, 絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする

平行六面体の体積.



体積だから, 絶対値 $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の順序を変更しても等しい.
じゃあ絶対値を取る前の符号は等しい?
実は, 順序を循環的に変えたときは $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の符号も同じ.




1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号が逆になる.
右手の指で言うと, **中** $\cdot$ (**親** $\times$ **人**) $>0$.
右手系の座標系では $\boldsymbol{e}_z\cdot(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y)>0$. 左手だと逆符号.
符号つき体積

行列式 線形代数☆演習 I(2024)L25?

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-1\times(-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-1\times\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

mobius L05

L06-Q5

## Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

# 写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L07(2024-05-01 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-01 Wed 06:57 JST hig"

## 今日の目標

- 加藤 線形代数 p.7 $2 \times 2$ 行列と $2 \times 1$ 行列 (ベクトル) の積が計算できる
- 加藤 線形代数 例題 2,3(pp.9,10) 1 次変換から行列, 行列から 1 次変換を求められる

## Quiz

### L06-Q1

### Quiz 解答: 平面の方程式

1. $\frac{1}{\sqrt{14}}(3x+y-2z)=C$ とおく. $\boldsymbol{r}_0$ を通ることから, $\sqrt{14}C=3\cdot 1$
   よって, $3x+y-2z=3$.
2. $0x+0y+1z=C$ とおく. $\boldsymbol{r}_0$ を通ることから, $C=-4$ よって,
   $z=-4$.

### L06-Q2

### Quiz 解答: 平面のパラメタ表示とベクトル方程式

1. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}13\\2\\1\end{bmatrix}\qquad (t,s\text{はパラメタ})$$

2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は平面の法線ベクトルのひとつ. よって, 方程式は,

$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

すなわち

$$x - 13 = 0.$$

3. 略
4. 方程式を満たしているかどうかチェックして, $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ は平面上にある. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ は平面上にない.

L06-Q3

Quiz 解答: パラメタ表示された直線と，方程式で表された平面の共通部分

$f(\boldsymbol{p}(t)) = 0$ を解いて，$t = -4$. よって共通部分は，点
$\boldsymbol{p}(-4) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}(-4) + \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

# 直線と平面の共通部分の求め方 (例 2)

L06-Q4

Quiz 解答: 方程式で表された直線と，パラメタ表示された平面の交点

$f_1(\boldsymbol{p}(t,s)) = f_2(\boldsymbol{p}(t,s)) = 0$ を解いて，$t = 2, s = 3$. よって共通部分は，点 $\boldsymbol{p}(2,3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{3} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$.

# ここまで来たよ

6 空間内の平面・直線の共通部分

7 写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換
- 1. 写像と変換
- 2. 1 次変換と行列
- 3. いろいろな 1 次変換 (途中まで)

# ◆写像 加藤 線形代数 §0.1

## 定義 (写像)

2 つの集合 (set) $X, Y$ において，$X$ のどの要素 (element, 元ともいう) にも，$Y$ の要素が 1 つずつ対応しているとき，この対応 (規則) を $X$ から $Y$ への写像 (map, mapping) という． 加藤 線形代数 p.6,p.12,p.191

## 写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (集合) $\to$ 終域 (集合)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 $\mapsto$ 像

$f(a) = b$ ともかく．$b$ を「$f$ による $a$ の像 (image)」という

# 写像の例

$X$=実数全体または部分集合, $Y$=実数全体，というケースに限定したとき，写像は（以前から知っている）関数 (function) に一致する.

## 例 (実数から実数への写像=関数)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^2$　　高校なら関数 $f(x) = x^2$ と書くところ.

写像は, 一般の集合で考えられる.

## 定義 (集合)

$\mathbb{R}$ =(実数の全体の集合)
$\mathbb{R}^2 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}$: 2 次元実数ベクトルの集合=平面 $E$.

集合={元の形|元の満たす条件}.

## 例 (直線のパラメタ表示は写像)

平面内の場合 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
(空間内なら $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)
$f : t \mapsto \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$
同様に使う書き方: $f(t) = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{x}(t) = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$

## 例

空間内の平面のパラメタ表示は［　　］から［　　］への写像

$$\boldsymbol{p}(t, s) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} t + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} s + \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$$

## 例

平面内の直線の方程式の $f(\boldsymbol{x})$ は［　　］から［　　］への写像

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 3x + 2y + 3 = 0$$

## 例

空間内の平面の方程式の $f(\boldsymbol{x})$ は［　　］から［　　］への写像

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 3x + 2y + 5z + 3 = 0$$

空間内の直線の方程式は［　　］から［　　］への写像 を使って書ける.

# ◆変換

**定義 (変換)**

集合 $X$ から $X$ 自身への写像を $X$ の変換 (transformation) という.

写像で，$Y = X$ のケースということ.

**例 (実数の変換)**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

(実数全体で定義された) 関数は実数の変換

**例 (写像で，$\mathbb{R}^2$ の変換であるもの)**

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

**例 (変換でない写像)**

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + 3y + 5$

# ここまで来たよ

6 空間内の平面・直線の共通部分

7 写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換
- 1. 写像と変換
- 2. 1 次変換と行列
- 3. いろいろな 1 次変換 (途中まで)

# ◆ 1 次変換 加藤 線形代数 p.7

## 定義 (1 次変換, 線形変換)

$\mathbb{R}^2$ の変換で,

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

の形のものを (2 次元の)1 次変換, 線形変換 (linear transformation) という.

## 教科書修正 加藤 線形代数 p.7

誤　これらの点の座標の間には以下の関係式が成り立つ. (式) この場合...)

正　これらの点の座標の間に以下の関係式 (式) が成り立つ場合...)

## 教科書の間違い探し

末尾の奥付の, 版と年月日を確認しよう.

出版社や著者のサイトに正誤表がないか確認しよう

`https://www.chart.co.jp/goods/item/contents/43168.html`

## 定義 (行列 (1 次変換の記号))

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = & ax + by \\ y' = & cx + dy \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

はすべて同じことを表す記法.

次のように実数を長方形の表状にならべて [　] で括ったもの $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を行列 (matrix) という.

行列 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ と行列 (ベクトル) $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ の積は行列 (ベクトル) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ に等しい,

と読む.

# 例題

## 行列 $A$ と $\boldsymbol{x}$ から像 $A\boldsymbol{x}$

加藤 線形代数 例題 2(p.9), mobius K0.2.10, チーム課題 1

## $\boldsymbol{x}$ と像 $A\boldsymbol{x}$ から行列 $A$

加藤 線形代数 例題 1, 加藤 線形代数 例題 3(p.10), mobius K0.2.10, チーム課題 2

## mobuis での行列入力

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ = <x,y>
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ = < <a,c>|<b,d> > (or < <a|b>,<c|d> >)
縦ベクトルを横にならべたイメージ. mobius L00.03

Trial L07 出題計画 mobius K0.2.10

# ここまで来たよ

6 空間内の平面・直線の共通部分

7 写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換
- 1. 写像と変換
- 2. 1 次変換と行列
- 3. いろいろな 1 次変換 (途中まで)

## 対称変換 加藤 線形代数 例 1(p.7)

### 例 (対称変換)

- $x$ 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $y$ 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 直線 $y = x$ に関する対称変換 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- 原点に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

## 相似変換と恒等変換 加藤 線形代数 例 1(p.8)

### 例 (相似変換)

- 相似比 $k$ の相似変換 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = kE$
- 恒等変換 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

## 回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

### 例 (回転変換)

- 一般角 $\theta$ だけ回転した回転変換 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

# 写像の合成・行列の積|0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L08(2024-05-08 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-07 Tue 09:09 JST hig"

## 今日の目標

- 加藤 線形代数 §0.1(p.6,8) 対称変換・相似変換の行列を書ける
- 加藤 線形代数 §0.3(p.9) 行列の積を計算できる
- 加藤 線形代数 §0.3(p.11) 写像の合成 と 行列の積 の関係を説明できる

# 復習: 写像と変換と 1 次変換

## 写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (domain) $\to$ 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 (element) $\mapsto$ 像 (image)

「$f(a) = b$」「写像 $f$ による $a$ の像は $b$」「写像 $f$ は $a$ を $b$ に写す」

$X = Y$ であるような写像を，「$X$ の変換」という．
$X = Y = \mathbb{R}^2$ で，次の形の変換 $f$ を「$\mathbb{R}^2$ の 1 次変換」という．$a, b, c, d$: 定数

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \overset{\text{行列による表記}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# 対称変換 加藤 線形代数 例 1(p.7)

高校では対称移動と言っていたもの.

## 例 (対称変換)

次の 1 次変換を表す行列は…

- $x$ 軸に関する対称変換
- $y$ 軸に関する対称変換
- 原点に関する対称変換
- 直線 $y = x$ に関する対称変換

L08-Q1

## Quiz(1 次変換を表す行列の求め方)

直線 $y = x$ に関する対称変換を表す行列を求めよう.

# ◆相似変換と恒等変換 加藤 線形代数 例 1(p.8)

## 例 (相似変換)

次の 1 次変換を表す行列は…

- 恒等変換 単位行列 $E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.
  - 平面の点を動かさない
- 相似比 $k$ の相似変換 $kE = \left[\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right]$.
  - ベクトルを $k$ 倍する

L08-Q2

## Quiz(正射影ベクトルを与える 1 次変換を表す行列)

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ への正射影ベクトルを対応させる変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は 1 次変換か．1 次変換なら，$f$ を表す行列を求めよう．

# ここまで来たよ

7 写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換

8 写像の合成・行列の積|0 章平面と 1 次変換
- ◆1 次変換の合成|3. いろいろな 1 次変換

# 最初にまとめ

| 写像・変換の言葉 (一般的) | 行列・ベクトルの言葉 |
|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ | 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ |
| $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 $f$<br>$\boldsymbol{x}$ の像は $f(\boldsymbol{x})$ | $(2\times 2)$ 行列 $A$<br>行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$ |
| 1 次変換 $f, g$ の合成変換 $g\circ f$<br>$\boldsymbol{x}$ の像は $g(f(x))$ | 行列の積 $BA$<br>$BA\boldsymbol{x}$ |

# ◆ 1 次変換の合成 加藤 線形代数 p.10

## 定義 (合成写像)

加藤 線形代数 p.10

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ があるとき, $x \in X$ を，まず $f$, 次に $g$ で写すことで像を得る写像

$$h : X \to Z$$

を考え，$h = g \circ f$ と書く.
$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である.
この $h$ を, $f$ と $g$ の合成写像 (composition) という.

- $X = Y = Z$ なら, $f, g, h$ は $X$ の変換. $h$ は合成変換
- $Z = Y = Z = \mathbb{R}$ なら $f, g$ は関数, $h$ は合成関数

合成写像は $f, g$ の順序による
$f$ と $g$, $g$ と $f$ の合成写像は異なる. $g \circ f \neq f \circ g$.

# L08-Q3

## Quiz(写像の合成)

$\mathbb{R}$ の変換 $f, g$ を考える.

$$f : x \mapsto \sin x,$$
$$g : x \mapsto x^2 + 3.$$

1. 実数 $x$ を, まず $f$ で写し, 次に $g$ で写した像を答えよう.
2. 実数 $x$ を, まず $g$ で写し, 次に $f$ で写した像を答えよう.
3. 合成変換 $g \circ f$ の像 $(g \circ f)(x)$ を求めよう.
4. 合成変換 $f \circ g$ の像 $(f \circ g)(x)$ を求めよう.

加藤 線形代数 例題 4(p.11)

## 加藤 線形代数 例題 5(p.11) でその上の部分を解説

**例**

1 次変換 $f$ を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 1 次変換 $g$ を表す行列を $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ とする.
まず $f$, 次に $g$ で写す 1 次変換 $h = g \circ f$ を表す行列 $C$ を求めよう.

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とする.

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = B(A\boldsymbol{x}) = B \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y)-(2x-y) \\ -5(x+y)+3(2x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x+3y \\ 1x-8y \end{bmatrix}.$$

この 1 次変換を表す行列は $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$.
任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $C\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x})$ が成立する.
行列 $C$ を $B$ と $A$ の積 加藤 線形代数 p.22 とよび, 記号 $BA$ で表すことにしよう.
まず $f$, 次に $g$ だから $BA$
まず $g$, 次に $f$ なら $AB$
一般に $BA$ はどんな式で書ける?

# 行列の積 加藤 線形代数 p.22

$\boldsymbol{x}$ を使わず，行列だけで完結して合成変換を求められる．

$$\begin{bmatrix} (ae+bg)x+(af+bh)y \\ (ce+dg)x+(cf+dh)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right).$$

$$\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

## 定義 (行列の積)

行列の積 (右辺) を左辺で定義する．

$$\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

下左 = 下 · 左

$BA \neq AB$. なぜなら $g \circ f \neq f \circ g$ だから．

加藤 線形代数 例題 5 mobius K0.3.10

L08-Q4

## Quiz(1 次変換の合成と行列の積)

$\mathbb{R}^2$ の変換を考える.

1. $x$ 軸に関する対称変換 $f$ を表す行列 $A$ を求めよう.
2. 直線 $y = -x$ に関する対称変換 $g$ を表す行列 $B$ を求めよう.
3. 行列の積 $BA$ を計算しよう.
4. 行列の積 $AB$ を計算しよう.
5. 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を，まず $f$ で，次に $g$ で写した像を求めよう（順に写す，行列を一度にかける，の 2 つの方法で).
6. 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を，まず $g$ で，次に $f$ で写した像を求めよう（順に写す，行列を一度にかける，の 2 つの方法で).

mobius K0.3.20

# 写像が等しいとは 加藤 線形代数 p.12,191

## 定義 (写像が等しい 加藤 線形代数 p.12)

$f : X \to Y$ と $g : Z \to W$ が等しい $(f = g)$ (写像として等しい) とは, $X = Z, Y = W$ であって, $X$ の任意の要素 $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ (要素として等しい) が成り立つことをいう.

## 命題 (1 次変換と行列の 1 対 1 対応)

$\mathbb{R}^2$ の 1 次変換が $f = g$ であること
$\Leftrightarrow$ $f, g$ を表す行列の 4 個の数がそれぞれ等しいこと

# 3 個以上の写像の合成 加藤 線形代数 p.12 ,3 個以上の行列の積

$f, g, h$ を写像とする.
任意の $x \in X$ に対して,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)), \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x))$$

$\rightsquigarrow$ 3 個の合成写像は，2 個ずつの合成をどの順序でしてもよい.

写像の結合法則 (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

この両辺を, 便利な記号として, $h \circ g \circ f$ と書いちゃう.

$f, g, h$ が 1 次変換とし, これらを表す行列を $A, B, C$ とする.
$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ の表す行列を考えて,
$\rightsquigarrow$ 行列の積の計算の順序によらない.

行列の積の結合法則 (associativity) $C(BA) = (CB)A$

これを, 便利な記号として, $CBA$ と書いちゃう.
3 個の行列の積は，2 個ずつの積をどういう順序で計算してもいい.

# 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L09(2024-05-10 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-11 Sat 10:18 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §0.3(p.14) 角 $\theta$ の回転行列 $R_\theta$ を書ける
- 加藤 線形代数 §1.3(p.34) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を書ける
- 加藤 線形代数 §0.3(p.12) 逆写像と逆行列を説明できる

L08-Q1

## Quiz 解答:1 次変換を表す行列の求め方

対称変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は, $f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$.
1 次変換 $f$ を表す行列を $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

は, $x, y$ についての恒等式. よって, $a = d = 0, b = c = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

別解
1 次変換であることがわかっているなら，一般の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ でなくても, 必要条件として具体的な ($\mathbb{R}^2$ なら) 2 点，例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の写る先を考えて $A$ を決定できる.

L08-Q2

L08-Q3

## Quiz 解答: 写像の合成

1. $f(x) = \sin x.\ g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3.$
2. $g(x) = x^2 + 3.\ f(g(x)) = \sin(x^2 + 3).$
3. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3.$
4. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 + 3).$

## L08-Q4

## Quiz 解答:1 次変換の合成と行列の積

1. $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$
2. $g(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}.$
   $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$
3. $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$
4. $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$
5. $(g \circ f)(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}.$
6. $(f \circ g)(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$

# ここまで来たよ

8 写像の合成・行列の積|0 章平面と 1 次変換

9 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換
- ◆回転と 1 次変換|3. いろいろな 1 次変換
- ◆逆写像|3. いろいろな 1 次変換

# ◆回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

## 例 (回転変換)

原点のまわりに一般角 $\theta$ だけ回転移動する 1 次変換 $f_\theta$ を表す行列 (回転行列) は

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

なぜなら, 1 次変換であることを仮定して,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

から 行列 $R_\theta$ を決めるとそうなる.

覚え方

自分の言葉でどうぞ

L09-Q1

## Quiz(回転移動の 1 次変換の行列)

1. 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ を, 原点を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動した点 $\boldsymbol{x}'$ を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{x}'$ を, さらに, 原点を中心に $\frac{1}{3}\pi$ だけ回転移動した点 $\boldsymbol{x}''$ を求めよう.

当然そうなるべきだが，$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ が，三角関数の加法定理から示せる.

加藤 線形代数 例題 6(p.14) mobius K0.3.40

# ここまで来たよ

8 写像の合成・行列の積|0 章平面と 1 次変換

9 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換
- ◆回転と 1 次変換|3. いろいろな 1 次変換
- ◆逆写像|3. いろいろな 1 次変換

# 最初にまとめ

| 写像・変換の言葉 (一般的) | 行列・ベクトルの言葉 |
|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ | 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ |
| $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 $f$ | $(2 \times 2)$ 行列 $A$ |
| $\boldsymbol{x}$ の像は $f(\boldsymbol{x})$ | 行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$ |
| 1 次変換 $f, g$ の合成変換 $g \circ f$ | 行列の積 $BA$ |
| 1 次変換 $f$ の逆変換 $f^{-1}$ | 逆行列 $A^{-1}$ |

# ◆逆写像

復習+ちょっと

## 写像

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (domain) $\to$ 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 (element) $\mapsto$ 像 (image)

「 $f(a) = b$」「写像 $f$ による $a$ の像は $b$」「写像 $f$ は $a$ を $b$ に写す」

**定義 (値域 (range) 加藤 線形代数 p.12)**

終域の部分集合 $\{f(x)|x \in X\} \subset Y$ を $f$ の値域という.

**定義 (上への (onto) 写像, 全射 (surjection) 加藤 線形代数 p.12)**

$f$ は $X$ から $Y$ の上への写像 $\Leftrightarrow$ 値域=終域

**定義 (1 対 1 の (one-to-one) 写像, 単射 (injection) 加藤 線形代数 p.13)**

$f$ は 1 対 1 の写像 $\Leftrightarrow (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

**定義 (全単射 (bijection) 加藤 線形代数 p.13)**

$f$ が全単射 $\Leftrightarrow$ $f$ が $Y$ の上への 1 対 1 の写像

## 定義 (逆写像)

$f$ が $Y$ の上への 1 対 1 の写像であるとき
$Y$ の各要素 $y$ に対して $f(x) = y$ となる $X$ の要素がただひとつ定まる.
$g : y \mapsto x$ で写像 $g : Y \to X$ を定める.
$g$ を $f$ の逆写像といい, $f^{-1}$ とかく.

$$f^{-1} : Y \to X$$
$$f(x) \mapsto x$$

変換なら 逆変換
写像・関数の肩の $-1$ は (逆数ではなく) 逆写像・逆関数

L09-Q2

## Quiz(逆変換)

1. $\mathbb{R}$ の変換 $f : x \mapsto 3x$ に逆変換があれば求めよう.
2. $\mathbb{R}$ の変換 $g : x \mapsto x^2$ に逆変換があれば求めよう.
3. $\mathbb{R}$ の変換 $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ に逆変換があれば求めよう.

(変換は写像)

# 逆写像の性質

## 命題 (逆写像の逆写像)

逆写像の逆写像はもとの写像. すなわち $(f^{-1})^{-1} = f$

## 定義 (恒等写像 (恒等変換))

$\mathrm{id_X} : X \to X$
$\mathrm{id_X} : x \mapsto x.$

## 命題 ($\mathbb{R}^2$ の恒等変換)

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ は 1 次変換で, 単位行列 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される.

## 命題 (逆写像の性質)

$f : X \to Y$, 1 対 1 で上への写像のとき,
$f \circ f^{-1} = \mathrm{id_Y}$
$f^{-1} \circ f = \mathrm{id_X}$

# 1 次変換の逆変換の行列は?

## 逆行列を求める

### 例 (一般の 1 次変換の逆変換)

1 次変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が 1 対 1 で $X$ の上への変換であるとする. $f$ が行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表現されるとき, $f^{-1}$ を表現する $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ は?

考え方 1

$A$ は $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ だから,
$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ だから, ここから $B$ を求める.

考え方 2 $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ より

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

未知数 $p, q, r, s$ の 4 元 1 次方程式. これを解く.

## 定義 (逆行列)

1 次変換 $f$ を表す行列が $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき, 逆変換 $f^{-1}$ があるなら, それを表す行列を $A$ の逆行列 (inverse) $A^{-1}$ といい,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$$

とかける. 略記 $\Delta = ad - bc$ (ギリシャ文字デルタ. 'デターミナント' ).

証明 加藤 線形代数 p.32. 検算は容易.

## 命題 (逆行列の逆行列, 逆行列の性質)

$A$ の逆行列が $A^{-1}$ であるとき

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad \text{逆写像の逆写像より}$$
$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad \text{逆写像の性質より}$$

L09-Q3

## Quiz(逆行列)

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ に対して, $BA = E$ を満たす行列 $B$ を求めよう.

加藤 線形代数 例題 4(p.36) | 加藤 線形代数 練習 7(p.36) (検算容易)

mobius K0.3.30

チーム課題 L09

# 行列のスカラー倍

## 定義 (行列のスカラー倍)

記号 $k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times k$ を次のように定義する.

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times k = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

記号は 空白でも $\times$ でも $\cdot$ でもよい (実数同士の積と同じ気分)

## 例

相似変換の表示相似比 $k$ の相似変換 ($k$ 倍の拡大) を表す行列 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ は, 単位行列 $E$ を用いて, $k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = kE$ とも書ける.

L09-Q4

## Quiz(スカラー倍の逆行列)

逆行列 $\left(3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1}$ を求めよう.

# 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L10(2024-05-15 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-15 Wed 11:17 JST hig"

今日の目標

- 行列の型と成分と行ベクトル列ベクトルを読み取れる
- 一般の型の行列の和とスカラー倍を計算できる
- 一般の型の行列の積を計算できる

L09-Q1

## Quiz 解答: 回転移動の 1 次変換の行列

1.
$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & +\cos\frac{2}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

2.
$$\boldsymbol{x}'' = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{3}\pi & -\sin\frac{1}{3}\pi \\ \sin\frac{1}{3}\pi & +\cos\frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

行列の積を先に計算してもよい．$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = R_\pi$ になる．
当然そうなるべきだが，一般に，$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ が，三角関数の加法定理から示せる．

L09-Q2

## Quiz 解答: 逆変換

1. 全単射になっている. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{3}x$.
2. $g$ は全射でも単射でもないので, $g^{-1}$ は存在しない.
3. $h$ は全射ではない (単射ではある) ので, $h^{-1}$ は存在しない ($\log x$ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体ではない).

L09-Q3

Quiz 解答: 逆行列

逆行列 $A^{-1}$ の定義から $B = A^{-1}$.
(または，逆行列 $A^{-1}$ があるとすれば，両辺の右から $A^{-1}$ をかけて，$BAA^{-1} = EA^{-1}$ すなわち $B = A^{-1}$)

2 次の逆行列の公式から, $A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 3 - 2\cdot 4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & +\frac{2}{5} \\ +\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

または，$B$ の成分を未知数として 4 元連立 1 次方程式を解いても求められる.

# ここまで来たよ

9 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換

10 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念
- 1. 行列とは何か
- ◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, ゼロ行列 | 2. 行列の演算
- ◆行列の積 | 2. 行列の演算

# ◆行列とは

## 定義 (行列 加藤 線形代数 定義 1-1(p.16))

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を $m$ 行 $n$ 列の 行列 という.
$a_{ij} \in \mathbb{R}$ を $A$ の $(i,j)$ 成分という 加藤 線形代数 p.17

加藤 線形代数 例 1(p.17), 練習 1,2(p.18) mobius K1.1.10

# 正方行列

## 定義 (正方行列 加藤 線形代数 p.17)

行列 $A$ が $n$ 行 $n$ 列であるとき, $A$ は $n$ 次の正方行列という.
$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という. 対角成分以外 $0$ の行列を対角行列という. 加藤 線形代数 §1.3

## 定義 (行ベクトル, 列ベクトル 加藤 線形代数 p.17)

- $m$ 行 1 列の行列を縦ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 $A$ の中の $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$ を, 行列 $A$ の第 $j$ 列という 加藤 線形代数 p.16
- $A$ の第 $j$ 列を $m$ 行 1 列の行列すなわちベクトル (列ベクトル, 縦ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ を, $A$ の第 $j$ 列ベクトルという 加藤 線形代数 なし mobius <a,b,c>
- 1 行 $n$ 列の行列を横ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 $A$ の中の $a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}$ を, 行列 $A$ の第 $i$ 行という 加藤 線形代数 p.16
- $A$ の第 $i$ 行を 1 行 $n$ 列の行列すなわちベクトル (行ベクトル, 横ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ を, $A$ の第 $i$ 行ベクトルという 加藤 線形代数 なし 大注意:mobius <a|b|c>

加藤 線形代数 例 2(p.18), 練習 3(p.18) mobius K1.1.10

ベクトルは行列の一種だが, mobius では, $m$ 行 1 列の行列<<a,b,c>> と, 列ベクトル (縦ベクトル)<a,b,c> を区別する, など. mobius L00.04

# ここまで来たよ

9 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換

10 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念
- 1. 行列とは何か
- ◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, ゼロ行列 | 2. 行列の演算
- ◆行列の積 | 2. 行列の演算

# ◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, 零行列

- 行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19)
  - ある概念で, 2 つが「等しい」ことの定義は自明ではない. 例: 三角形
- 行列の和と差 加藤 線形代数 定義 2-2(p.19)
  - 型が同じ時だけ，行列の間の和と差が定義される
- 行列のスカラー (定数) 倍 加藤 線形代数 定義 2-3(p.19)
  - 特別な例として，$-A$ は $A$ のスカラー $-1$ 倍.

ちょっと，前から知ってるベクトルに似てる… ベクトルは $m$ 行 1 列の行列だから.

# 零行列, ゼロ行列

## 定義 (零行列 加藤 線形代数 定義 2-4(p.22))

$O$ (英字大文字)
すべての成分が 0 である行列.
$m$ 行 $n$ 列であることを特に示すときは, $O_{mn}$.

## 定理 (零行列を含む行列の和 加藤 線形代数 定理 2-1(p.22))

行列の型があっているとき,
$A + O = O + A$.
$A + (-A) = (-A) + A = A - A = O$.

なるべく行列の変数 $A, B, O$ のまま計算し, 成分で書くのは最後の手段

加藤 線形代数 例 1, 例題 1,2, 練習 1,2(pp.20–21) mobius K1.2.10

# ここまで来たよ

9 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換

10 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念
- 1. 行列とは何か
- ◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, ゼロ行列 | 2. 行列の演算
- ◆行列の積 | 2. 行列の演算

# 和の記号 $\sum$ の意味を再確認

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| $b$ | 111 | 107 | 105 | 103 | 102 |

$a_1 = 2$ , $a_2 = 3$ , $a_3 = 5$ , $a_4 = 7$ , $a_5 = 11$

$b_1 = 111$, $b_2 = 107$ ,$b_3 = 105$ , $b_4 = 103$ , $b_5 = 102$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = 3 + 5 + 7 = \sum_{j=2}^{4} a_j,$$

$$\sum_{i=2}^{4} 2^{a_i} = 2^3 + 2^5 + 2^7,$$

$$\sum_{i=0}^{2} a_{i+2} = 3 + 5 + 7,$$

$$\sum_{k=3}^{5} b_k = 105 + 103 + 102,$$

$$\sum_{i=p}^{q} g(a_i) = g(a_p) + g(a_{p+1}) + \cdots + g(a_q).$$

$$\sum_{i=0}^{2} b_{5-i} = 102 + 103 + 105,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_i = 3 \cdot 107 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 103,$$

$$i = 2, \sum_{j=2}^{4} a_i b_j = 3 \cdot 107 + 3 \cdot 105 + 3 \cdot 103,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_{6-i} = 3 \cdot 103 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 107,$$

$\vdots$

mobius K1.1.30

# ◆行列の積

## 定義 (行列の積 加藤 線形代数 定義 2-5)

- 行列 $A$ ( $\ell \times m$ 型, 成分 $a_{ij}$ $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 $B$ ( $m' \times n$ 型, 成分 $b_{ij}$ $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 $A, B$ の積 $AB$ が定義され,

- 行列 $C = AB$ ( $\ell \times n$ 型, 成分 $c_{ij}$ $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

# 例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ell = 2, m = m' = 3, n = 2.$

$$\begin{aligned} c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} &= a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} \\ &= -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3 \end{aligned}$$

# 行列の積のルールの直観的おぼえ方

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

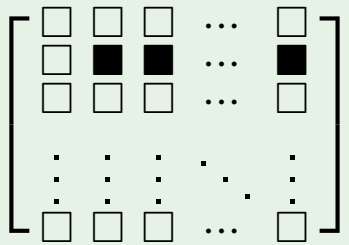
行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$ もこの一例と思える.

横ベクトルと行列の積. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ 縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要.

ベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は (まだ) 一例とは思えない (型があってない).

## Quiz(成分の和の記号)

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して，次の図の ■ の位置の成分 $a_{ij}$ の和を，$\sum$ と $a_{ij}$ を使って表そう．正解は 1 つではないが，1 つ答えればよい．



Hint. $n = 5$ と思って $a_{ij}$ の和で書いてみよう．$\sum$ の式はそれと一致する?
$a_{ij}$ の $i, j$ の関係はあってる? 最大最小の $i$ はあってる?

# 単位行列

## 定義 (単位行列 加藤 線形代数 p.24)

$n$ 次の単位行列 $E$ or $E_n$ とは,
$n$ 次正方行列で
$(i,j)$ 成分が $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ であるものをいう.

# 行列の積の演算法則

## 定理 (行列の積の演算法則 加藤 線形代数 定理 2-2)

以下, 積の型はあっているとする. $A$ は $m$ 行 $n$ 列とする.

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= A(BC) && \text{結合法則, 当たり前ではない} \\
A(B+C) &= AB+AC && \text{分配法則 1} \\
(A+B)C &= AC+BC && \text{分配法則 2} \\
AE_n &= E_mA = A && \text{単位行列の性質} \\
AO_{nk} &= O_{mk}, \quad O_{\ell m}A = O_{\ell n} && \text{添字は型} \\
\text{略記} A^k &= \underbrace{AA\cdots A}_{k} \quad (k>0), && \text{行列のべき乗, } A^0 = E.
\end{aligned}
$$

結合法則は，行列が 1 次変換を表す場合には納得した.
なるべく行列の変数 $A, B, O, E$ のまま計算し, 成分で書くのは最後の手段

## 「成立しない」性質

$AB = BA$　反例 加藤 線形代数 例 5(p.23)

$AB = O$ならば$(A = O$または$B = O)$　反例 加藤 線形代数 例 9(p.26)

「任意の $A, B$ に対して成立するわけではない」という意味．$A = B$ なら $AA = AA$, のような，たまたま成立する場合はある.

加藤 線形代数 練習 4,5,6(p.27), mobius　K1.2.30

実数やベクトルからの類推を使わず，上の法則だけを使う

例 $(AB)^2$

例 $(A - B)(A + B)$

例 $(A^2B + E)^2$

# オンライン (オンデマンド) 授業のお知らせ (2024-05-22 水 1 予定)

授業内容の特性から, また, 今後必要になるかもしれないオンライン授業の練習として, 2024-05-22 水 1 の授業は，龍大標準方式のオンライン (オンデマンド) で行います.

場所 オンライン (オンデマンド) は，大学（発話は必要ないので，図書館やスチューデントコモンズや，空き教室）で参加しても自宅で参加してもかまいません.

日時 締切までに動画を視聴して課題を提出すれば，この講時内に活動しなくてもかまいません.

方法 manaba のコースニュースを見て，manaba のコンテンツで学習を進めてください.

準備 事前にシステムが使えるかどうか試し練習しておいてください.
2024-05-17 金 (?) にお知らせする予定.

# 和の記号・行列のブロック分け・トレース | 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L11(2024-05-17 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-17 Fri 07:17 JST hig"

今日の目標

- 行列をブロック分けして計算できる
- $\sum$ と添字で成分の計算ができる
- 行列のトレースを計算できる

L10-Q1

## Quiz 解答: 回転移動の 1 次変換の行列

1.
$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & +\cos\frac{2}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

2.
$$\boldsymbol{x}'' = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{3}\pi & -\sin\frac{1}{3}\pi \\ \sin\frac{1}{3}\pi & +\cos\frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

行列の積を先に計算してもよい．$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = R_\pi$ になる．
当然そうなるべきだが，一般に，$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ が，三角関数の加法定理から示せる．

L10-Q2

## Quiz 解答: 逆変換

1. 全単射になっている. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{3}x$.
2. $g$ は全射でも単射でもないので, $g^{-1}$ は存在しない.
3. $h$ は全射ではない (単射ではある) ので, $h^{-1}$ は存在しない ($\log x$ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体ではない).

L10-Q3

## Quiz 解答: 逆行列

逆行列 $A^{-1}$ の定義から $B = A^{-1}$.
(または，逆行列 $A^{-1}$ があるとすれば，両辺の右から $A^{-1}$ をかけて，$BAA^{-1} = EA^{-1}$ すなわち $B = A^{-1}$)

2 次の逆行列の公式から, $A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 3 - 2\cdot 4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & +\frac{2}{5} \\ +\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

または，$B$ の成分を未知数として 4 元連立 1 次方程式を解いても求められる.

# ここまで来たよ

10 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

11 和の記号・行列のブロック分け・トレース | 第 1 章 行列の概念
- ◆行列の区分け (ブロック分け)| 2 行列の演算
- 和の記号 | 2. 行列の演算

# 対角成分以外はゼロの行列 (対角行列) の積は楽

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

じゃあこの「ブロック対角行列」は?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} = ?$$

実は

$$\begin{bmatrix} D & O \\ O & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & O \\ O & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DJ & O \\ O & HM \end{bmatrix}$$

$O$ は 2 次のゼロ行列，$D, H, J, M$ は 2 次の正方行列, $DJ$,$HM$ は行列の積で，その中をさらに計算する.
ブロック分け=行列を 2 階層で考える.

# ◆行列の区分け (ブロック分け) 加藤 線形代数 p.27

## 加藤 線形代数 p.27 の解読

$n$ 行 $m$ 列の行列 $A = [a_{ij}]$ を, 縦横に格子状に分割する. 例えば $2 \times 2$.

$$A = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$D, F, G, H$ は行列. 正方でなくても, 同サイズでなくてもいい. 加藤 線形代数 では $D = A_{11}$ のように書いてあるけど, これは行列 ($A$ の小行列 (submatrix)). 11 は行列につけた番号. $D = A_{11} = [d_{ab}]$.

$$AB = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & K \\ L & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & P \\ Q & R \end{bmatrix} = C$$

とする. ここで, $B$ の列の分割 ($J, L$ の境い目) は, $D, F$ の境い目と一致している必要がある.
$N, Q$ の境い目は $D, G$ の境い目, $N, P$ の境い目は $J, K$ の境い目と一致する (行列の型のルールに似てる)

## 行列の積を 2 段階に分けて, ブロックごとに計算できる

$N = DJ + FL$　行列の積っぽいルール. 行列の積と和. 順序に意味あり

$DJ = [s_{tv}]$とすると

$$s_{tv} = \sum_u d_{tu} j_{uv}$$　行列の積. 成分で書いた

証明 成分で書いてみると両辺同じ

加藤 線形代数 例 10(p.28)

加藤 線形代数 練習 7(p.29)　加藤 線形代数 練習 8(p.29)　ブロック対角のとき, ブロック分けで積を考えると楽, という例.

mobius　K1.2.50

# ◆行列の区分け (列ベクトルへの分割) 加藤 線形代数 p.29

ブロック分けの小行列として, 列ベクトルを選んだ場合の一例

3 次の正方行列 $C$, $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}$(注: この 1,2,3 は, 1,2,3 番目のベクトルという意味), 縦ベクトル $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$ (この 1,2,3 は成分の番号)

加藤 線形代数 p.29

$$A\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1\boldsymbol{x}_1 & k_2\boldsymbol{x}_2 & k_3\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}.$$

また,

$$CA = C \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\boldsymbol{x}_1 & C\boldsymbol{x}_2 & C\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}$$

# 行列の区分け (行ベクトルへの分割)

ブロック分けの小行列として, 行ベクトルを選んだ場合の一例

3 次の正方行列 $B$ を 3 つの行ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ に分割して $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{bmatrix}$ と書くと,

$$D = BA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}.$$

すなわち, $D = [d_{ij}]$ とすると, $d_{ij} = \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{x}_j$.

mobius　K1.2.50

# ここまで来たよ

10 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

11 和の記号・行列のブロック分け・トレース | 第 1 章 行列の概念
- ◆行列の区分け (ブロック分け)| 2 行列の演算
- 和の記号 | 2. 行列の演算

# 行列の成分表示と $\sum$ の演算 加藤 線形代数 pp.17,24

$A = [a_{ij}]$:「行列 $A$ の成分として $a$, 行の添字として $i$, 列の添字として $j$ を使うよ」

$AB = [c_{ik}]$「積 $AB$ の成分を $c_{ik}$ と書くよ」

これを濫用 (?) して, 行列の和を $[a_{ij}] + [b_{ij}]$ と書いたりする.

$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$「「行列の和」の成分は, 成分の和である」

$k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$ 「行列のスカラー倍」の成分, は成分のスカラー倍

# 行列の積の復習

## 定義 (行列の積 加藤 線形代数 定義 2-5)

- 行列 $A$ ( $\ell \times m$ 型, 成分 $a_{ij}$ $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 $B$ ( $m' \times n$ 型, 成分 $b_{ij}$ $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

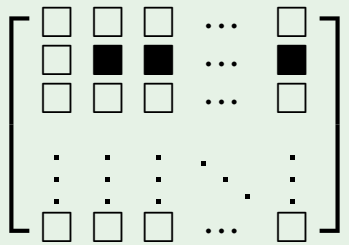
に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 $A, B$ の積 $AB$ が定義され,

- 行列 $C = AB$ ( $\ell \times n$ 型, 成分 $c_{ij}$ $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

## Quiz(成分の和の記号)

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して，次の図の ■ の位置の成分 $a_{ij}$ の和を，$\sum$ と $a_{ij}$ を使って表そう．正解は 1 つではないが，1 つ答えればよい．



Hint. $n = 5$ と思って $a_{ij}$ の和で書いてみよう．$\sum$ の式はそれと一致する?
$a_{ij}$ の $i, j$ の関係はあってる? 最大最小の $i$ はあってる?

# 行列のトレース

## 定義 (トレース 加藤 線形代数 章末問題 1.6(p.39))

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次正方行列に対して, 次の対角成分 $a_{ii}$ の和をトレース (trace) という.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

:= 左辺の新しい記号, 用語を右辺で定義する, という記号. $\equiv$, $\stackrel{\Delta}{=}$ など.

## 命題 (トレースの性質 加藤 線形代数 章末問題 1.6(p.39))

$A, B$: $n$ 次正方行列

1. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
2. $c$: 実数に対して, $\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A)$.
3. 延期
4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

# $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ の証明

# 単位行列

## 定義 (単位行列 加藤 線形代数 p.24)

$n$ 次の単位行列 $E$ or $E_n$ とは,
$n$ 次正方行列で $(i,j)$ 成分が $e_{ij} = \delta_{ij}$ であるものをいう.

## 定義 ((復習) クロネッカーのデルタ記号)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

# 対角行列

## 定義 (対角行列 加藤 線形代数 §1.3)

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ で，$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という．
対角成分でない成分が 0 である行列 ($i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ である行列) を対角行列という．

## $n$ 次対角行列の具体的な表示

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$D = [d_{ij}]$ とすると，クロネッカーのデルタを使って

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} (= \lambda_j \delta_{ij})$$

# 和 $\sum$ とクロネッカー記号 $\delta_{ij}$ の補足

## 和 $\sum$ 内のクロネッカー記号 $\delta_{ij}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} F_{ijkl}G_{ijkm}\delta_{ij} \\
=&F_{ijkl}G_{i1km}\delta_{i1} + \cdots + F_{iikl}G_{iikm}\delta_{ii} + \cdots + F_{inkl}G_{inkm}\delta_{in} \\
=&0 + \cdots + 0 + F_{iikl}G_{iikm} \cdot 1 + 0 + \cdots + 0 \\
=&F_{iikl}G_{iikm}
\end{aligned}
$$

「$\sum_j \delta_{ij}$ ナン $j$ トカ は, $\sum_i \delta_{ij}$ を消す代わりに, 代入 $j = i$ でダミー添字 $j$ を消せばいい」

$F, G$ が別の $\sum$ や $\delta$ を含んでいてもかまわない.

## $\sum$ と $\delta_{ij}$ の計算の例題

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{i1}F_{ijk} = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{k1}F_{ijk} = ?$$

## 単位行列の性質

任意の $n$ 次正方行列 $A$ に対して，$AE = EA = A$ を示そう．

## 非零対角成分の対角行列の逆行列

$n$ 次対角行列 $D$ のすべての対角成分 $\lambda_i$ が $0$ でないとき，$D$ の逆行列が，対角成分を $\lambda_i^{-1}$ とする対角行列であることを示そう．

# 行列の積の結合則 $((AB)C = A(BC)$ の証明

| 型 | $\ell \times m$ | $m \times n$ | $n \times p$ | $\ell \times n$ | $\ell \times p$ | $\ell \times p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 行列 | $A = [a_{ij}]$ | $B = [b_{jk}]$ | $C = [c_{kq}]$ | $AB = [d_{ik}]$ | $(AB)C = [f_{iq}]$ | $A(BC) = [g_{iq}]$ |

$(AB)C$, $A(BC)$ のすべての成分が等しければ等しい.

$$
\begin{aligned}
f_{iq} &= \sum_{k=1}^{n} d_{ik} c_{kq} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kq} && (a_{ij} b_{jk} c_{kq} = x_{jk} \text{ とおくと}) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) && ((x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22})) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{(j,k)=(1,1)}^{(n,m)} a_{ij} b_{jk} c_{kq} && (x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) && ((x_{11} + x_{12}) + (x_{21} + x_{22})) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left( \sum_{k=1}^{n} b_{jk} c_{kq} \right) = g_{iq}.
\end{aligned}
$$

(1) 分配法則 $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{13} = a_{11}b_{11}c_{13} + a_{12}b_{21}c_{13}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{jk}\right)$ って, 結局 $n \times m$ 個に長方形状に並んだ $x_{jk}$ を全部加えろってこと.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\right)$$

順序に意味ないから, $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq m, 1\leq k\leq n}$ みたいに書いちゃうこともある.

# オンライン (オンデマンド) 授業 L12(2024-05-22 水 1)

授業内容の特性から, また, 今後必要になるかもしれないオンライン授業の練習として, 2024-05-22 水 1 の授業は，龍大標準方式のオンライン (オンデマンド) で行います.

日時 2024-05-20 月 1 公開．2024-05-24 金 09:15 までに動画を視聴して課題 (mobius) を提出してください．水 1 には限定されません.

場所 オンライン (オンデマンド) は，大学（発話は必要ないので，図書館やスチューデントコモンズや，空き教室）で参加しても自宅で参加してもかまいません.

方法 manaba のコースニュースを見て，manaba のコンテンツで学習を進めてください.

準備 manaba の線形代数コースのコンテンツに「参加方法」を載せています．事前に学習方法の練習をしておいてください.

Trial 2024-05-22 水の Trial L11 はオンラインで 2024-05-24 金 09:15 まで，2024-05-24 金の Trial L12 はふだん通り紙で 09:15 から.

# 転置行列・正則行列| 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L12(2024-05-22 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-17 Fri 12:08 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.30 転置行列の定義と計算が説明できる
- 加藤 線形代数 p.32 正則行列の定義と計算が説明できる
- オンデマンドオンライン授業で学習できる

# ここまで来たよ

11 和の記号・行列のブロック分け・トレース | 第 1 章 行列の概念

12 転置行列・正則行列| 第 1 章 行列の概念
- 転置行列|3. 行列の種々の概念
- 正則行列と逆行列|3 行列の種々の概念

# ◆転置行列

## 定義 (転置行列 加藤 線形代数 定義 3-1(p.30))

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A = [a_{ij}]$ に対して, $n$ 行 $m$ 列の行列 $B = [b_{ji}]$ で

$$b_{ji} = a_{ji}$$

であるものを $A$ の転置行列 (transposed matrix) といい, ${}^{\mathrm{t}}A$ と書く.

$A$ の $t$ 乗 $A^t (t = 1, 2, \ldots)$ と間違えないために, 左上に立体で頭文字 t とかく.

## 例 (転置行列)

縦ベクトルの転置は横ベクトル, 横ベクトルの転置は縦ベクトル.

$$ {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} $$

加藤 線形代数 章末問題 1,2(p.39)

## 例 (転置行列)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が縦ベクトルのとき,

$$ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} $$

縦ベクトルの内積　行列の積

# 転置行列の性質

## 定理 (転置行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-1(p.31))

$A, B$ を行列, $k \in \mathbb{R}$ とするとき,

$$
\begin{aligned}
{}^{t}({}^{t}A) &= A, \\
{}^{t}(A+B) &= {}^{t}A + {}^{t}B, \\
{}^{t}(kA) &= k\,{}^{t}A, \quad \text{以上まあ当たり前} \\
{}^{t}(AB) &= {}^{t}B\,{}^{t}A. \quad \text{超重要}
\end{aligned}
$$

# ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$ の証明

加藤 線形代数 練習 1(p.31)

## 証明

型はあってる ( ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B$ じゃあわない).

あとは成分が等しいことを言う (行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19)).

$A = [a_{ik}], B = [b_{kj}], AB = [c_{ij}],$

${}^{\mathrm{t}}A = [p_{ki}]$, ${}^{\mathrm{t}}B = [q_{kj}]$, ${}^{\mathrm{t}}(AB) = [r_{ji}]$ とすると,

$p_{ki} = a_{ik}, q_{jk} = b_{kj}, r_{ji} = c_{ij}.$

L12-Q1

## Quiz(転置の積の成分表示)

$n$ 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ を考える.

1. $A^2$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.
2. ${}^tAA$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.
3. $A\,{}^tA$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.

# ここまで来たよ

11 和の記号・行列のブロック分け・トレース | 第 1 章 行列の概念

12 転置行列・正則行列| 第 1 章 行列の概念
- 転置行列|3. 行列の種々の概念
- 正則行列と逆行列|3 行列の種々の概念

加藤 線形代数 p.32

$n$ を固定したとき,
$n$ 次正方行列全体の集合は和, 差, 積 (, 転置) の操作のもとで「閉じている」(結果もその集合にはいる).

- $AB \neq BA$ を除けば実数全体の集合と同じ.
- $0$ に相当するのが零行列 $O$.
- $1$ に相当するのが単位行列 $E$.

体, 代数

# ◆正則行列と逆行列

**定義 (正則行列と逆行列** 加藤 線形代数 定義 3-2(p.32)**)**

$n$ 次正方行列 $A$ に対して, $XA = AX = E$ となる $n$ 次行列が存在するとき, $A$ を正則行列 (non-singular matrix) といい, $X$ は $A$ の逆行列 (inverse matrix) であるという.

$A$ が正則かどうか判定する方法

$n \times n$ 元連立 1 次方程式 $AX = E$ を解く. 未知数 $X = [x_{ij}]$.

- 解 $X$ が求まったら $A$ は正則行列である. $X$ は逆行列.
- 解なしになったら $A$ は正則行列でない.

$\rightsquigarrow$ 2 次元の公式

正則行列である例, ない例 加藤 線形代数 例題 2(p.32)

## 命題

正則行列 $A$ の逆行列は 1 つに定まる. それを $A^{-1}$ とかく.

1 つに定まること (唯一性 (uniqueness)) の証明: $X, Y$ とおいて $X = Y$ という

# 正則行列の性質

## 定理 (正則行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-2(p.33))

1. $A, B$ が正則行列 ならば, $AB$ も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $A$ が正則行列 ならば, $A^{-1}$ も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.

### 記法

$P, Q$: 命題

$P \Leftrightarrow Q$: $P$ と $Q$ は同値, $Q$ は $P$ の必要十分条件, $P$ を $Q$ で定義する.

$P \Rightarrow Q$: $P$ ならば $Q$, $P$ は $Q$ の十分条件, $Q$ は $P$ の必要条件, $P$: 仮定, $Q$: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 偽 | 真 |

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 真 | 真 |

# $P$ ならば $Q$ の証明: $P$ を仮定して $Q$ を導く

# 2 次の正則行列と逆行列

## 定理 (2 次の正則行列と逆行列 加藤 線形代数 (p.34))

2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して, $\Delta = ad - bc$ とおくと,

1. $\Delta \neq 0$ ならば $A$ は正則行列で, 逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
2. $\Delta = 0$ ならば $A$ は正則行列でなく, 逆行列は存在しない.

$\Delta \neq 0$ は, $A$ が正則行列であるための必要十分条件

$\Delta = \det A = |A|$ などと表し, $A$ の行列式 (determinant) という.
今後, 3 次以上の行列にも行列式が定義される 加藤 線形代数 第 4 章.
行列式は行列でない. 行列式は 1 個の実数.

加藤 線形代数 例題 4(p.36)

# 逆行列の性質

## 定理 (逆行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-3(p.36))

$A, B$ を $n$ 次の正則行列とする (逆行列はある).

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. (定義そのもの)
2. $AB = E$ ならば, $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ (意味: 片側のチェックでいい)
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (再掲)
4. $(A^{-1})^{-1} = A$ (再掲)
5. $k \neq 0$ のとき, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ (わかる)

加藤 線形代数 練習 7(p.36)

$AB = E$ ならば, $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ の証明 加藤 線形代数 練習 5(p.36)

# ブロック分けされた行列の逆行列

加藤 線形代数 なし

ブロック分けされた正方行列

$$A = \begin{bmatrix} D & O \\ O & H \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} J & O \\ O & M \end{bmatrix},$$

で $D, J$ が同じ次数の正方行列, $H, M$ が同じ次数の正方行列 だと積が考えられ,

$$AB = \begin{bmatrix} DJ & O \\ O & HM \end{bmatrix}$$

なのだった.

加藤 線形代数 例 10(p.28)

## ブロック対角行列の逆行列

正方行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} D & O \\ O & H \end{smallmatrix}\right]$ で, $D, H$ が正則行列のとき, $A$ も正則行列で, 逆行列は

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & H^{-1} \end{bmatrix}.$$

# 1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L13(2024-05-24 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-25 Sat 10:01 JST hig"

今日の目標

- 行列の和差逆スカラー倍を含む計算ができる
- 平面の 1 次変換による直線の像を, パラメタ表示と方程式で求められる
- 正射影を表す行列を求められる

L12-Q1

## Quiz 解答: 転置の積の成分表示

${}^{\mathrm{t}}A = [b_{ji}]$ とすると, $b_{ji} = a_{ij}$.

1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$
3. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$

# ここまで来たよ

12 転置行列・正則行列| 第 1 章 行列の概念

13 1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念
- 逆行列と転置行列
- 第 0 章 4'. 1 次変換による像
- 1 次変換としての正射影

## 転置の逆, 逆の転置

$({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$ は成立するか?

アドバイス 難しい問はまず 2 次行列や例で考えてみる. 反例が見つかったらもうけもの.

# ここまで来たよ

12 転置行列・正則行列| 第 1 章 行列の概念

13 1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念
- 逆行列と転置行列
- 第 0 章 4'. 1 次変換による像
- 1 次変換としての正射影

# 写像の像

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ について, 2 次正方行列 $A$ で表される 1 次変換 $f$ による像を
$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ とする.
移動前 $\boldsymbol{x}$, 移動後 $\boldsymbol{x}'$.
点でなく部分集合についての定義.

## 定義 (写像による部分集合の像 加藤 線形代数 p.191)

$f : X \to Y$ を写像とする. 部分集合 $S \subset X$ について,
$f(S) = \{f(x) | x \in S\} \subset Y$ を, 写像 $f$ による $S$ の像という.

「$S$ は $f$ で $f(S)$ に写る」

# 正方形・平行四辺形の像

$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\begin{aligned} S =& \left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \middle| 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ =& \left\{ \boldsymbol{e}_1 s + \boldsymbol{e}_2 t \middle| 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

は，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を 4 頂点とする正方形.

## 正方形の像

正則行列 $A$ で表される 1 次変換 $f$ による，正方形 $S$ の像は？

$$\begin{aligned} f(S) =& \{A(\boldsymbol{e}_1 s + \boldsymbol{e}_2 t) | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{A\boldsymbol{e}_1\ s + A\boldsymbol{e}_2\ t | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

これは，$\boldsymbol{0}, A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, A\boldsymbol{e}_1 + A\boldsymbol{e}_2$ を 4 頂点とする平行四辺形 ($A\boldsymbol{e}_1$ と $A\boldsymbol{e}_2$ が張る平行四辺形)
実は，平行四辺形の像も平行四辺形

> 実は $A$ が正則行列であるなら $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2$ は平行にならない（正方形はつぶれない）．$A$ が正則でないなら正方形は直線や 1 点につぶれる

## パラメタ表示された直線の像

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ $(t \in \mathbb{R})$ とパラメタ表示される直線の, 行列 $A$ で表される 1 次変換 $f$ による像は? ($\boldsymbol{a}$ 接ベクトル，$\boldsymbol{c}$ 直線上の点)

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上のパラメタ表示で書ける.
移動後の点 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. $A$ が正則行列なら, 左から $A^{-1}$ をかけて
$A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$.
これをパラメタ表示に代入して, $A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$.
両辺に左から $A$ をかけて, $\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$.

## 命題 (直線の 1 次変換による像のパラメタ表示)

直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ の, 行列 $A$ の表す 1 次変換による像のパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, これは直線.

$A$ が正則のとき, 1 次変換で直線は直線に写る

接ベクトル $\boldsymbol{a}$ は $A\boldsymbol{a}$ に写る.

「通る点」$\boldsymbol{c}$ は $A\boldsymbol{c}$ に写る.

L13-Q1

## Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

パラメタ表示

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

をもつ $\mathbb{R}^2$ の直線 $\ell$ を考える.

1. 直線 $\ell$ を描こう.
2. 直線 $\ell$ 上の点を 2 つ見つけよう（$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とする）.
3. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 $f$ による $\ell$ の像のパラメタ表示を求め，描こう.
4. 像 $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)$ を求めよう.

mobius　K1.3.60

## 直線の 1 次変換による像の方程式

方程式 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0$ で表される直線の, 行列 $A$ の表す 1 次変換による像は? ($\boldsymbol{n}$ 法線ベクトル，$\boldsymbol{c}$ 直線上の点)

まず内積をやめて転置を使って行列で書く. $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}={}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}$.

$$ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0 $$

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上の方程式にしたがう. ($A$ が正則行列なら) $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{x}'$. これを代入し, $E=A^{-1}A$ で細工して

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}(A^{-1}\boldsymbol{x}'-(A^{-1}A)\boldsymbol{c}) &= 0\\
{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}A^{-1}(\boldsymbol{x}'-A\boldsymbol{c}) &= 0\\
{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n})(\boldsymbol{x}'-A\boldsymbol{c}) &= 0\\
({}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}'-A\boldsymbol{c}) &= 0
\end{aligned}
$$

## 命題 (直線の 1 次変換による像の方程式)

直線 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}=0$ の, 行列 $A$ の表す 1 次変換 $f$ による像は, $A$ が正則のとき,

$$({}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{c})=0.$$

これは直線.

**1 次変換で直線は直線に写る**

法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は ${}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n}$ に写る.

「通る点」$\boldsymbol{c}$ は $A\boldsymbol{c}$ に写る.

L13-Q2

## Quiz(方程式で定まる直線の 1 次変換による像)

方程式

$$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\cdot\left(\boldsymbol{x}-\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\right)=0$$

で定まる $\mathbb{R}^2$ の直線 $\ell$ を考える.

1. 直線 $\ell$ を描こう.
2. $\ell$ 上の点を 2 つ見つけよう（$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とする）.
3. 行列 $A=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 $f$ による $\ell$ の像の方程式を求めよう.
4. 像 $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)$ を求めよう.

mobius　K1.3.60

# ここまで来たよ

12 転置行列・正則行列| 第 1 章 行列の概念

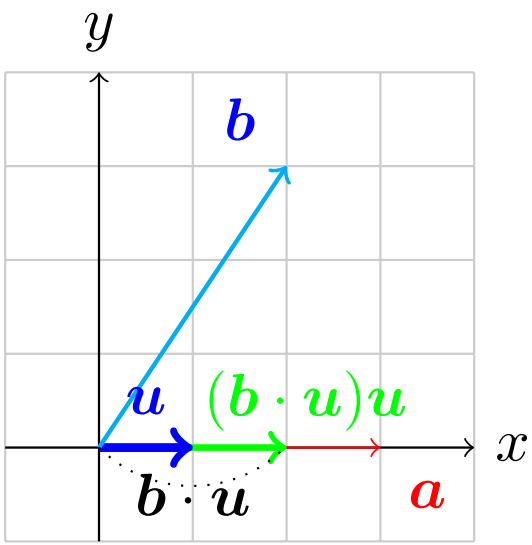
13 1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念
- 逆行列と転置行列
- 第 0 章 4'. 1 次変換による像
- 1 次変換としての正射影

# ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトル

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta$, $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

## 定義 (スカラー射影と正射影ベクトル)

ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影とは実数 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = |\boldsymbol{b}| \times 1 \times \cos\theta$. ($\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向き成分ともいう).
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトル (正射影) とは
$(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = (|\boldsymbol{b}| \times 1 \times \cos\theta)\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}$.



L13-Q3

## Quiz(正射影ベクトルを与える 1 次変換を表す行列)

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ への正射影ベクトルを対応させる変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は 1 次変換か．1 次変換なら，$f$ を表す行列を求めよう．

mobius K1.3.65

## 定義 (正射影)

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ への正射影ベクトルを対応させる 1 次変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，ベクトル $\boldsymbol{a}$ への正射影という．

直交射影ともいう．
本当は，$\mathbb{R}^n$ で，直線，平面，$m$ 次元部分空間への正射影が定義されるが，ここではこのタイプに限定する．

## 命題 (正射影の性質)

$\mathbb{R}^2$ で，

- 正射影の値域は，原点を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線
- 正射影は単射でも全射でもない
- 正射影を表す行列は正則でない

# 正射影を表す行列

$f$ を $\boldsymbol{a}$ への射影とする．
$\boldsymbol{b}$ の，$\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルは，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{b}) =& (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} \\ =& \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}\cdot\boldsymbol{b}) \\ =& \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \\ =& \frac{1}{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

これは行列の積と見なせる．
$\boldsymbol{a}$ への正射影 $f$ を表す行列は，$\frac{1}{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}$

L13-Q4

## Quiz(正射影ベクトルを与える 1 次変換を表す行列)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ への正射影ベクトルを与える 1 次変換を $f$ とする.

1. $f$ を表す行列を求めよう.
2. $f^{-1}$ は定義されるか？ 定義されるなら $f^{-1}$ を表す行列を求めよう.

# 3 次元の回転行列・対角行列・上/下三角行列| 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L14(2024-05-29 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-31 Fri 11:46 JST hig"

今日の目標

- 和差積逆転置スカラー倍の混ざった正方行列の計算ができる
- 空間の 1 次変換の行列を書ける
- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる

## L13-Q1

## Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

1. 略
2. 例えば $t = 0, 1$ に対して，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
3. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ すなわち $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$.
4. $f(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. これらは，$f$ による $\ell$ の像の上にある $(t = 0, 1)$.

## L13-Q2

## Quiz 解答: 方程式で定まる直線の 1 次変換による像

1. 略
2. $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ はもちろん $\ell$ 上にある．$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ も方程式を満たし $\ell$ 上にある．

3. $A\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$.
   ${}^t(A^{-1})\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$.
   よって,
   $$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}\cdot\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}\right) = 0.$$
4. $f(\boldsymbol{x}_1) = AVx_1 = \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$ は $f$ の像の方程式を満たすことがわかる.

# ここまで来たよ

13 1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念

14 3 次元の回転行列・対角行列・上/下三角行列| 第 1 章 行列の概念
- 行列の和差積逆スカラー倍
- 3 次元空間の 1 次変換
- 対角行列

# 行列の計算のルール

次のルールだけを使ってよい．ここにないルールは使ってはいけない．

- 積（零行列，単位行列の乗算） 加藤 線形代数 定理 2-2(p.26)
- 逆行列のルール 加藤 線形代数 定理 3-2(p.36)
- 零行列の加算のルール 加藤 線形代数 定理 2-1(p.24)
- 巾の略記 $A^n = \underbrace{AA\dots A}_{n}$, $A^0 = E$, $A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
- 定数（専用変数）$E$ 単位行列，$O$ 零行列.

# L14-Q1

## Quiz(行列の積和逆スカラー倍)

次の行列の積を展開して，括弧がない簡単な形にしよう．

1. $(AB + (2BA)^{-1})(3A + BA)$
2. $B(A + B^2 + B^{-1} + (4AB)^{-1})B^{-1}$

# 前回のチーム課題から

1. $((2AB)^{-1}+6B)^2$
2. $(AB+2A)((2BA)^{-1}+A)$
3. $(A+(BA)^{-1})(B+(10A)^{-1})$
4. $(2A-(2B)^{-1})(B+(AB)^{-1})$
5. $(4A+(2BA)^{-1})^2$

# ここまで来たよ

13 1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念

14 3 次元の回転行列・対角行列・上/下三角行列| 第 1 章 行列の概念
- 行列の和差積逆スカラー倍
- 3 次元空間の 1 次変換
- 対角行列

# 3 次元空間の 1 次変換

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を 3 次の正方行列 $A$ で移動させることができる.

$z$ 軸を回転軸とする $xy$ 平面内の回転　ブロック分け，ブロック対角行列

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & +\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆変換は？

$x$ 軸を回転軸とする $yz$ 平面内の回転　ブロック分け，ブロック対角行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$$

逆変換は？

$xz$ 平面 (平面 $y = 0$) に関する対称変換 (鏡映)　対角行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆変換は？

平面 $x = y$ に関する対称変換 (鏡映)　ブロック分け，ブロック対角行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆変換は？

# L14-Q2

## Quiz(3 次元の回転)

$y$ 軸を回転軸とする, $xz$ 平面内の角 $\theta$ の回転の線形変換 (1 次変換) を表す行列を書こう. ただし, どっちまわりを正の $\theta$ にするかは自由に決めてよい.

# 3 次元の回転行列とオイラー角

2 次元の回転行列は 1 パラメタ $\theta$ で $R_\theta$.
3 次元の任意の回転は, 3 パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).
オイラー角 $\psi, \theta, \phi$ にとることが多い.
3 次元の回転行列は, 角 $\psi, \theta, \phi$ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$
\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

`http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html`

# ここまで来たよ

13 1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念

14 3 次元の回転行列・対角行列・上/下三角行列| 第 1 章 行列の概念
- 行列の和差積逆スカラー倍
- 3 次元空間の 1 次変換
- 対角行列

# ◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37

## 定義 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

- $A$ が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- $A$ が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- $A$ が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Leftrightarrow$「対角成分でない成分はゼロ」
- $A$ が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = + {}^{\mathrm{t}}A.$
- $A$ が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = - {}^{\mathrm{t}}A.$

$P \Leftrightarrow Q$: $P$ と $Q$ は同値, $Q$ は $P$ の必要十分条件, $P$ を $Q$ で定義する.
$P \Rightarrow Q$: $P$ ならば $Q$, $P$ は $Q$ の十分条件, $Q$ は $P$ の必要条件, $P$: 仮定, $Q$: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 偽 | 真 |

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 真 | 真 |

# 対角行列

## $n$ 次対角行列

具体的な表示

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$D = [d_{ij}]$ とすると，クロネッカーのデルタを使って

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} (= \lambda_j \delta_{ij})$$

$\lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ を対角成分という．
対角行列全体は, $n$ 次正方行列の中で, 扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ).
線形代数 II(後期), 代数 (3 年)
何か計算していて対角行列にできたらラッキー　対角化
線形代数 II(後期)
単位行列は，対角成分 $\lambda_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ な対角行列．

## L14-Q3

### 行列と対角行列との積

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ と，対角成分を $\lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ とする対角行列 $D$ を考える．

1. $B = AD$ の $(i, j)$ 成分を求めよう．
2. $C = DA$ の $(i, j)$ 成分を求めよう．

L14-Q4

## Quiz(対角行列の積)

$n$ 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ ,$B = [b_{ij}]$ を考える. $A, B$ は対角行列であるとする.

1. 積 $AB$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.
2. 積 $BA$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.
3. べき乗 $A^m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.

mobius K1.3.70

## L14-Q5

### 対角行列の逆行列

$\lambda_j \neq 0\ (j = 1, \ldots, n)$ を対角成分とする対角行列の逆行列を求めよう.

## L14-Q6

### 単位行列

$A$ を任意の $n$ 次正方行列，$B = [\delta_{ij}]$ とする．$AB = BA = A$ を示そう．

# 証明 連立 1 次方程式と行列 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L15(2024-05-31 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-30 Thu 17:38 JST hig"

今日の目標

- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる
- 加藤 線形代数 §2.1 連立 1 次方程式から係数行列と拡大係数行列を取り出せる

## L14-Q1

### Quiz 解答: 行列の積和逆スカラー倍

1. $3ABA + AB^2A + \frac{3}{2}A^{-1}B^{-1}A + \frac{1}{2}E.$
2. $BAB^{-1} + B^2 + B^{-1} + \frac{1}{4}A^{-1}B^{-1}.$

## L14-Q2

### Quiz 解答:3 次元の回転

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

## L14-Q3

### Quiz 解答: 対角行列の積

$a_{ij} = \lambda_j\delta_{ij}, b_{ij} = \mu_j\delta_{ij}$ とする. このとき, $\lambda_j = a_{jj}, \mu_j = b_{jj}$ である.

1. $C = AB = [c_{ij}]$ とする.

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{ik} \mu_j \delta_{kj} \end{aligned}$$

$\sum_k \delta_{ik} \bullet$ を実行して $k = i$ を代入することで,

$$c_{ij} = \lambda_i \mu_j \delta_{ij} = \lambda_j \mu_j \delta_{ij}.$$

よって, $C = AB$ は $\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n$ を対角成分とする対角行列.
$(i, j)$ 成分は, $a_{jj} b_{jj} \delta_{ij}$.

2. (厳密には数学的帰納法で) $A^m$ は, $(a_{11})^m, (a_{22})^m, \ldots, (a_{nn})^m$ を成分とする対角行列である. $A^m = [g_{ij}]$ とすると, $g_{ij} = (a_{jj})^m \delta_{ij}$.

# ここまで来たよ

14 対角行列・上三角行列・下三角行列| 第 1 章 行列の概念

15 証明 連立 1 次方程式と行列 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 証明
- 1. 連立 1 次方程式と行列

# 証明「示そう」の書き方

| | | |
|---|---|---|
| 仮定<br><br><br><br><br><br><br>結論 | 仮定<br>よって「仮定を定義で書き直したもの」<br><br><br><br>「結論を定義で書き直したもの」<br>よって, 結論 | 仮定<br>よって「仮定を定義で書き直したもの」<br><br>**(ギャップを埋める)**<br><br>「結論を定義で書き直したもの」<br>よって, 結論 |

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.
「仮定 $Q$ は前に持っていっていい」

## $P$ ならば $R$ の証明

$P \Rightarrow R$

$P$ とする

$\vdots$

$\boxed{R}$

よって $P \Rightarrow R$.

## $P$ ならば ($Q$ ならば $R$) の証明

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

$P$ とする

$\vdots$

$Q$ とする

$\vdots$

$R$

よって $Q \Rightarrow R$

よって $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

結局，$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには，
($P$かつ$Q$) $\Rightarrow R$ を示せばいい.
つまり「仮定 $Q$ は前に持っていっていい」

## L15-Q1

### Quiz(三角行列対角行列の和)

1. $A, B$ が対称行列ならば，和 $A + B$ も対称行列であることを示そう．
2. $A, B$ が $n$ 次の対角行列ならば, 和 $A + B$ も $n$ 次の対角行列であることを示そう．

加藤 線形代数 練習 8(p.37)

# 「成り立たない」ことの証明

「成り立つか？」に対して，成り立たないことを言うには，その例 (反例) を 1 個挙げる．
L15-Q2

## Quiz(反対称行列と対角行列の和)

反対称行列と対角行列の和は反対称行列か？

### 考え方

「$A$ が反対称行列かつ $B$ が対角行列**ならば**，$C = A + B$ は反対称行列である」の反例を挙げる．
「$P$ **ならば** $Q$」が偽になるのは，$P$ が真, $Q$ が偽のときなので，
「$A$ が反対称行列かつ $B$ が対角行列」が真であって，「$C = A + B$ が反対称行列である」が偽であるような例 (反例) をひとつ挙げればよい．

# ここまで来たよ

14 対角行列・上三角行列・下三角行列| 第 1 章 行列の概念

15 証明 連立 1 次方程式と行列 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 証明
- 1. 連立 1 次方程式と行列

# ◆連立 1 次方程式の書き方 加藤 線形代数 p.41

変数 $x_1, \ldots, x_n$. 加藤 線形代数 練習 1(p.42) mobius K2.1.10

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdots + a_{1n}x_n \quad &= b_1 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \cdots + a_{mn}x_n \quad &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
$$

$$
\text{係数行列} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},
$$

$$
\text{未知数ベクトル} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{定数項ベクトル} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},
$$

$$
\text{拡大係数行列} \tilde{A} = \left[ A | \boldsymbol{b} \right].
$$

# ◆連立 1 次方程式を解く

加藤 線形代数 p.43

- 「系統的な」解法 (=拡大係数行列を入力, 解を出力とするアルゴリズム) そのもの自身を研究したい
  - その解法は必ず解を出力するのか?
  - 何ステップかかるのか?
- ここでは加減法のみを調べることにして, 代入法は考えない
- 最初に与えられたのと同じ個数 ($m$ 個) の等式をキープして, 同値変形だけを行っていく
- 特定の許された操作のみを行う.

加藤 線形代数 練習 2(p.45), 練習 3(p.47)

# 行列の基本変形| 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L16(2024-06-05 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-05 Wed 13:07 JST hig"

## 今日の目標

- 加藤 線形代数 p.48 行基本操作と行基本変形を説明できる
- 加藤 線形代数 p.50 階段形, その主成分, 階数の定義を説明できる
- 加藤 線形代数 p.52 簡約階段形の定義を説明できる

L15-Q1

## Quiz 解答: 三角行列対角行列の和

1 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ とする.
$A, B$ は対称行列である.
よって $a_{ij} = a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}$. (*)
$C = A + B = [c_{ij}]$ とする.
$c_{ij} \overset{\text{行列の和の定義}}{=} a_{ij} + b_{ij} \overset{\text{条件 (*)}}{=} a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$.
$c_{ij} = c_{ji}$
よって, $C$ は対称行列.

構成的)

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ を対角行列とする.
よって, $i \neq j$ ならば $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ ならば $b_{ij} = 0$. (*)

$k \neq \ell$ とする.
$A + B = [c_{ij}]$ とおくと,
$c_{k\ell} = a_{k\ell} + b_{k\ell}$ (行列の和の定義)
ここで, (*) より, $a_{k\ell} = b_{k\ell} = 0$.
よって $c_{k\ell} = 0$.
よって $k \neq \ell$ ならば $c_{k\ell} = 0$.
すなわち $A + B$ は対角行列

よって $A, B$ が対角行列ならば $A + B$ は対角行列

L15-Q2

## Quiz 解答: 反対称行列と対角行列の和

**考え方**

「$A$ が反対称行列かつ $B$ が対角行列**ならば**，$C = A + B$ は反対称行列である」の反例を挙げる．

「$P$ **ならば** $Q$」が偽になるのは，$P$ が真, $Q$ が偽のときなので，

「$A$ が反対称行列かつ $B$ が対角行列」が真であって，「$C = A + B$ が反対称行列である」が偽であるような例 (反例) をひとつ挙げればよい．

**証明 (答案にはここだけ書けばいい)**

そうとは限らない．なぜなら，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = A + B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ が反例

**注意**

もちろん，$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき，$C' = A' + B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ は反対称行列である．しかし，この主張は，「条件を満たすすべての $A$,$B$ に対して」ということなので，だめな $A, B, C = A + B$ の例を 1 個挙げれば主張を否定できる．

# ここまで来たよ

15 証明 連立 1 次方程式と行列 | 第 2 章 連立 1 次方程式

16 行列の基本変形| 第 2 章 連立 1 次方程式
- 2. 行列の行基本変形

# ◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

## 定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations))

$\textcircled{i}, \textcircled{j}$ は拡大係数行列の行番号. ①, ②, . . .

(R1) $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$, $i \neq j$
(R2) $\textcircled{i} \times$ (定数$c$), $c \neq 0$
(R3) $\textcircled{j} \times$ (定数$a$) $+ \textcircled{i}$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

# 行基本操作の可逆性

加藤 線形代数 p.49

行基本操作は, 別の行基本操作 (逆操作) で元に戻せる. だから連立 1 次方程式の変形としては同値.

(R1) $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$, $i \neq j$ の逆操作は…
(R2) $\textcircled{i} \times$ (定数$c$), $c \neq 0$ の逆操作は…
(R3) $\textcircled{j} \times$ (定数$a$) $+ \textcircled{i}$, $i \neq j$ の逆操作は…

L16-Q1

## Quiz(行基本変形による連立 1 次方程式の解法)

1. 連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 19 \\ 3x_1 + x_2 &= 24 \\ 2x_1 &= 14 \end{aligned}$$

を行列で書いたときの拡大係数行列 $\tilde{A}$ を右側に並べて書こう.

2. 1 回の変形では R1, R2, R3 のいずれかを 1 個だけ使い (①$\times(-3)+$③ のような 記号を記すこと), 最終的に $\begin{matrix} x_1= \text{数}, \\ x_2= \text{数}, \\ x_3= \text{数} \end{matrix}$ になるように連立 1 次方程式と行列を変形していこう.

(本来（や次々回 Trial）は行列を [::] → [::] → [::] → . . . のように横につなぐが，この問は，スライドのサイズの都合上，縦方向に書く)

加藤 線形代数 p.46 | 加藤 線形代数 練習 3(p.47)

# (行) 階段形 (ref=row echelon form)

## 定義 ((行) 階段形 (row echelon form) 加藤 線形代数 定義 2-1(p.50))

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A = [a_{ij}]$ が階段形であることの定義は 加藤 線形代数 p.51) を参照

加藤 線形代数 図 1(p.50)

階段形の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r$ と $c_i$ は？

加藤 線形代数 例 1(p.50) $,aE, O$

加藤 線形代数 練習 2(p.52) mobius　K2.2.30

階段形でない例 加藤 線形代数 注意 (p.51)

3 のところが縦 2 段になってるのがだめ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

## 定義 (階段形のいろいろな量 加藤 線形代数 p.51)

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A$ に対して，

- 階数 (rank) $r = \mathrm{rank} A$「段の個数」ただし $0 \leq r \leq m$.
- 主番号 $c_1, c_2, \ldots, c_r$「$i$ 段の横方向位置 (列番号)」ただし $1 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_r \leq n$
- 主列 第 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 列
- 主成分 (ピボット (pivot)) $a_{ic_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$「階段の角」

mobius K2.2.30

そうである例 加藤 線形代数 例 1(p.50) $, aE, O$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# ◆ (行) 簡約階段形 (rref=reduced row echelon form)

## 定義 ((行) 簡約階段形 加藤 線形代数 定義 2-2(p.52))

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ が簡約階段形
⇔

E1 $A$ が階段形
E2 主成分がすべて 1, すなわち, $a_{ic_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, r)$.
E3 各主列における主成分より上の成分もすべて 0, すなわち, $a_{kc_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, r, k < i)$.

## 簡約階段形の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 例 2(p.53) $,E,O$

$r$ と $c_i$ は？

加藤 線形代数 練習 4(p.53) mobius　K2.2.30

## 階段形だが簡約階段形でない例

加藤 線形代数 例 1(p.50) , $aE(a \neq 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# ◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

## 定理 (行基本変形定理)

任意の行列 $A$ は, 適当な行基本変形によって, 簡約階段形に変形できる.
変形後の行列 ($A$ の簡約階段化) はただ一つに定まる 加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
一意性の証明 教科書でも省略 (サポートサイトにあるそう)
存在の証明 入力:$A$, 出力:$A$ の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き) 加藤 線形代数 p.53–57 を与えることによる.
このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要. 説明延期.

# 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L17(2024-06-07 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-06 Thu 20:10 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 pp.54-59 掃き出し法で任意の行列を簡約階段形に基本変形して階数を求められる
- 加藤 線形代数 例題 1(p.62) 拡大係数行列を簡約階段形にして, 連立 1 次方程式が解ける

## L16-Q1

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 19 \\ 3 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$
2. 行列のみ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 19 \\ 3 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 1 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 1 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times(-3)+②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times(-2)+③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

これは次の連立方程式を表す拡大係数行列.

$$\begin{aligned} x_1 &= 7, \\ x_2 &= 3, \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

教科書で言う「階段形の行列」,「簡約階段形の行列」を,
世の中では「階段行列」,「簡約階段行列」＝「簡約行列」と言うことがあります. この授業でも, 口頭, および問題の一部でそうなってしまっている部分があります.

L17-Q1

## Quiz(拡大係数行列から 1 次方程式)

拡大係数行列が $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, 未知数が $x_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ である連立 1 次方程式を，行列やベクトルを使わずに，スカラーに対する複数の式として書こう.

掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

# ここまで来たよ

16 行基本操作| 第 2 章 連立 1 次方程式

17 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 3. 連立 1 次方程式とその解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

# ◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

## 定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations))

$\textcircled{i}, \textcircled{j}$ は拡大係数行列の行番号. ①, ②, . . .

(R1) $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$, $i \neq j$
(R2) $\textcircled{i} \times$ (定数$c$), $c \neq 0$
(R3) $\textcircled{j} \times$ (定数$a$) $+ \textcircled{i}$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

$\textcircled{j} \times$ (定数$a$) $+ \textcircled{i}$ の表示は，通常の多項式でなく，順序に意味がある.

元の行 ×(定数)+ 足される行.

多項式で順序がなくて ②＋③ って書いていいなら，どっちをどっちに加えたかわからないじゃん.

掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

# ◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

## 定理 (行基本変形定理の言い換え)

任意の行列 $A$ には簡約階段化 (適当な行基本変形によって $A$ から到達できる簡約階段形の行列) が存在する.
任意の行列 $A$ に対してその簡約階段化は一意である (ただ一つに定まる) 加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
一意性の証明 教科書でも省略 (サポートサイトにあるそう)
存在の証明 入力:$A$, 出力:$A$ の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き) 加藤 線形代数 p.53–57 を与えることによる
このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要.

掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

# 掃き出し法の概要

加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分 $c$ を R2 $①\times(1/c)$ で 1 にする
(4) R3 $①\times(-a)+ⓘ$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の $a$ を零にする
(10) R3 $①\times(-a)+ⓘ$ で, ブロックのその列の上側を零にする
(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う
(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

# Web アプリで

https://learn.hig3.net > 行基本変形計算機

https://bit.ly/redmatrix



https://learn.hig3.net > 動画 簡約階段化

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

# ◆行列の階数 (rank)

## 定義 (行列の階数 加藤 線形代数 定義 2-3(p.58))

行列 $A$ の簡約階段化の階数を, $A$ の階数 (rank) といい $\mathrm{rank}A$ と書く.

加藤 線形代数 練習 8,9(p.59) mobius 2.2.40

## 定理 (階数の性質)

$m \times n$ 行列 $A$ について, 次の不等式が成り立つ.
$\mathrm{rank}A \leq m, \mathrm{rank}A \leq n.$

# ここまで来たよ

16 行基本操作| 第 2 章 連立 1 次方程式

17 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 3. 連立 1 次方程式とその解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

# ◆行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.60)

## 定理 (行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 定理 3-1(p.60))

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ から, 行基本変形によって, $[B|\boldsymbol{b}']$ が得られるとき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ は同値.

どうせなら, 簡約階段形の $[B|\boldsymbol{b}']$ で解いた方が楽.

証明

- 操作前の連立 1 次方程式が成立するとき, 各操作後の連立 1 次方程式は成立する.
- 行基本操作の可逆性 加藤 線形代数 p.49 から, 操作後から操作前の連立 1 次方程式にも戻せる.

# 3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L18(2024-06-12 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-11 Tue 17:32 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.65 拡大係数行列の簡約階段化から，解の有無，解の自由度をも求められる．
- 加藤 線形代数 例題 1(p.62) 拡大係数行列の簡約階段化から，連立 1 次方程式の解を求めて, 2 種類の形で表せる

L17-Q1

## Quiz 解答: 拡大係数行列から 1 次方程式

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 &= 5 \\ 4x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

## 簡約階段形への基本変形の過程

- `https://learn.hig3.net` 動画 簡約階段化
- 加藤 線形代数 p.57 例題 1 の解答
- Teams に貼ったスクリーンショット

# ここまで来たよ

17 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

18 3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- ◆行基本変形と連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解
- ◆解の存在|3. 連立 1 次方程式とその解

# ◆行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.60)

## 定理 (行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 定理 3-1(p.60))

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ から, 行基本変形によって, $[B|\boldsymbol{b}']$ が得られるとき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ は同値.

どうせなら, 簡約階段形の $[B|\boldsymbol{b}']$ で解いた方が楽.

証明

- 操作前の連立 1 次方程式が成立するとき, 各操作後の連立 1 次方程式は成立する.
- 行基本操作の可逆性 加藤 線形代数 p.49 から, 操作後から操作前の連立 1 次方程式にも戻せる.

例 拡大係数行列の簡約化が次のように得られたとする.

$$\tilde{B} = [B|\boldsymbol{b}'] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は,

$$\begin{aligned} 0x_1 + \quad x_2 + \quad & \quad 2x_4 + \quad & \quad 4x_6 = \quad b_1 \\ x_3 + \quad & 3x_4 + \quad & 5x_6 = \quad b_2 \\ & x_5 + \quad & 6x_6 = \quad b_3 \\ & & 0 = \quad 0 \end{aligned}$$

主成分 (ピボット) に対応する $x_2, x_3, x_5$ は，左辺の 1 個所にしか現れない（しかも係数 1 で）から，これらについて解くのは簡単.

$$\begin{aligned} x_2 &= b_1 - 2x_4 - 4x_6 \\ x_3 &= b_2 - 3x_4 - 5x_6 \\ x_5 &= b_3 \qquad\quad - 6x_6 \end{aligned}$$

(他にも書くべきことあり)

主成分（ピボット）に対応しない $x_1, x_4, x_6$ は任意だが，求めるべき量なので，右辺に現れるのを放っておくわけにはいかない．同等に扱うため，任意の実数 $c, d, e$ を使って，$x_1 = c$, $c \in \mathbb{R}$ 任意，のように書く.

## 解の答え方 1（解があるとき）

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \quad c \\
x_2 &= b_1 \quad -2d-4e \\
x_3 &= b_2 \quad -3d-5e \\
x_4 &= \qquad d \\
x_5 &= b_3 \qquad -6e \\
x_6 &= \qquad\qquad e (c, d, e \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

## 解の答え方 2（解があるとき）ベクトルの形でも書ける.

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} (c, d, e \in \mathbb{R})
$$

# (解が存在する場合の) 連立 1 次方程式の解き方

## 簡約階段形の拡大係数行列を持つ連立 1 次方程式の解き方

加藤 線形代数 例題 1(p.62)

1. ピボットのない列 (**0**, $*$ になっている列) にかかる未知数を, 任意定数 (パラメタ) $c, d, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく. 任意定数の個数を解の自由度 (degree of freedom) という.
2. ピボットに対応する未知数は, これらの任意定数の 1 次式で書ける（その行の式を解いて）.

例 加藤 線形代数 例題 1(p.62) 加藤 線形代数 練習 2(p.54), 章末問題 2(p.72) mobius K2.3.10

`https://learn.hig3.net` > 動画 連立 1 次方程式

L18-Q1

## Quiz(拡大係数行列から連立 1 次方程式の解)

変数 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}$ に関する連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $\tilde{A} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ，次のようになった．

$$\tilde{A} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と同値な連立 1 次方程式を，行列を使わずに書こう．
2. 任意定数 $c, d, e, \cdots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \quad\vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう．
3. 任意定数 $c, d, e, \cdots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 c + \boldsymbol{v}_2 d + \ldots$ の形に書こう．

# ここまで来たよ

17 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

18 3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

- ◆行基本変形と連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解
- ◆解の存在|3. 連立 1 次方程式とその解

例 拡大係数行列の階段化が次のように得られたとする．

$$\tilde{B} = [B|\boldsymbol{b}'] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array}\right]$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする．

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は，

$$\begin{aligned} 0x_1 + \quad x_2 + \quad & \quad 2x_4 + \quad & \quad 4x_6 &= b_1 \\ x_3 + \quad & \quad 3x_4 + \quad & \quad 5x_6 &= b_2 \\ & \quad x_5 + \quad & \quad 6x_6 &= b_3 \\ & & 0 &= b_4 \end{aligned}$$

解の存在/非存在は，成分 $b_4$ が 0 かどうかで決まる．拡大係数行列の最終列=定数ベクトルの部分に段があるかないか？

解の存在/非存在は，成分 $b_4$ が 0 かどうかで決まる．拡大係数行列の最終列=定数ベクトルの部分に段があるかないか？

段がある $b_4 \neq 0$ $(3 = \mathrm{rank}A < \mathrm{rank}\tilde{A} = 4)$
解なし．

段がない $b_4 = 0$ $(\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\tilde{A} = 3)$
解が存在する（上で求めた）．

## 定理 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65))

$A$ を $m \times n$ 行列とする.
$n$ 変数の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$ とする.

1. (*) が解を持たない $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A < \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.
2. (*) が解を持つ $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$. (†)
   - (†) が成り立つとき, (*) の解の自由度は $n - \operatorname{rank} A$.

(†) が成り立つとき, 解の自由度が 0 なら解は一意に定まる, 正なら無限個の解が存在する.

加藤 線形代数 例題 3(p.68), 加藤 線形代数 練習 4(p.69) mobius K2.3.30

## 系 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度 加藤 線形代数 系 3-1(p.67))

$A$ を $m \times n$ 行列とする.
$m = \operatorname{rank} A$ ならば
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持ち, 解の自由度は $n - m$.

話し言葉「フルランク」$\Leftrightarrow m = \operatorname{rank} A$
話し言葉「ランク落ち」$\Leftrightarrow m > \operatorname{rank} A$
「フルランクのとき, (変数の個数 $n$)−(方程式の数 $m$) で決まる」
「系 Corollary」とは, 重要かもしれないけど定理から簡単に導ける命題のこと

# L18-Q2

## Quiz(拡大係数行列の簡約階段形から解の有無と解の自由度)

次の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$ を持つ連立 1 次方程式は解を持つか？ 解を持つなら解の自由度，解が一意的であるかどうかを答えよう．

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

# 3.1 基本行列と基本変形 | 第 3 章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L19(2024-06-14 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-14 Fri 11:10 JST hig"

今日の目標

- (非) 同次 2(3) 元連立 1 次方程式の解全体の集合が空集合，点，直線，平面 (，空間) になることを説明できる
- 加藤 線形代数 §2.3 同次連立 1 次方程式の解が説明できる
- 加藤 線形代数 §3.1 行/列基本操作と, 基本行列を左/右からかけることとの対応を説明できる

L18-Q1

## Quiz 解答: 拡大係数行列から連立 1 次方程式の解

1.

$$\begin{aligned} x_2 \quad +2x_3 \quad & \quad +3x_5 \quad +5x_6 \quad = 7, \\ x_4 \quad & +4x_5 \quad +6x_6 \quad = 8, \\ & \qquad 0 \qquad = a, \\ & \qquad 0 \qquad = 0. \end{aligned}$$

2. $a \neq 0$ のとき解なし.
   $a = 0$ のとき, $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{aligned} x_1 &= c, \\ x_2 &= 7 - 2d - 3e - 5f, \\ x_3 &= d, \\ x_4 &= 8 - 4e - 6f, \\ x_5 &= e, \\ x_6 &= f. \end{aligned}$$

3. $a \neq 0$ のとき解なし.
   $a = 0$ のとき，$c, d, e, f \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L18-Q2

## Quiz 解答: 拡大係数行列の簡約階段形から解の有無と解の自由度

| $\tilde{A}=[A\|\boldsymbol{b}]$ | $A$ の行の個数 $m$ | $A$ の列の個数 $n$ | rank$A$ | rank$\tilde{A}$ | 解あり rank$A$=rank$\tilde{A}$ | 解の自由度 $n-$ rank$A$ | 解が一意 $n-$ rank$A=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix}0&1&2&0&4\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ | 5 | 4 | 2 | 3 | No | — | — |
| $\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&4\\0&0&0&1&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ | 5 | 4 | 4 | 4 | Yes | 0 | Yes |
| $\begin{bmatrix}1&3&0&0&1&4\\0&0&1&0&2&3\\0&0&0&1&3&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ | 4 | 5 | 3 | 3 | Yes | 2 | No |
| $\begin{bmatrix}1&0&0&0&4&2\\0&1&0&0&3&3\\0&0&1&0&2&4\\0&0&0&1&1&5\end{bmatrix}$ | 4 | 5 | 4 | 4 | Yes | 1 | No |

# 2 元連立 1 次方程式の解の集合（平面内の）

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ (平面上の点)

## 定義 (連立 1 次方程式の解全体の集合 加藤 線形代数 p.146)

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を考える.
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解全体の集合とは,
$\{\boldsymbol{x} | \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \subset \mathbb{R}^n$.

以下, 任意定数 $c, d \in \mathbb{R}$.

例 1

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 2, 解の自由度 0, 解は一意的, 解全体の集合は 1 点

例 2 加藤 線形代数 p.183 線形代数☆演習 I(2024)L06 teamL06

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 1, 解の自由度は 1, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 直線

## 例 3 加藤 線形代数 p.184

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 0, 解の自由度は 2, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は平面全体

## 例 4

拡大係数行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A$ の階数はたまたま 1, 解の自由度は定義されない，解なし，解全体の集合は空集合

# 3 元連立 1 次方程式の解の集合（空間内の）

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (空間内の点) 線形代数☆演習 I(2024)L06 teamL06

階数は 3, 自由度 0, 解は一意に定まる, 解全体の集合は 1 点,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 \\ x_2 = & 3 \\ x_3 = & 11 \end{array} \rightsquigarrow 1 \text{ 点} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

階数は 2, 自由度 1, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 直線. 加藤 線形代数 p.183

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 - 7c \\ x_2 = & 3 - 9c \\ x_3 = & c \end{array} \rightsquigarrow 1 \text{ 直線} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

階数は 1, 自由度 2, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 平面. 加藤 線形代数 p.184

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 - 5c - 3d \\ x_2 = & c \\ x_3 = & d \end{array} \rightsquigarrow \text{平面} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

階数は 0, 自由度 3, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は空間全体.

$$\tilde{A} = O$$

# ここまで来たよ

18 2.3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- ◆同次連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解

19 3.1 基本行列と基本変形 | 第 3 章 行列の構造
- ◆基本行列|1. 基本行列と基本変形

# ◆同次連立 1 次方程式

## 定義 (同次連立 1 次方程式)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が

1. 同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
2. 非同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

同次=斉次=homogeneous(等質)=次数が同じ (今の場合, 各項が 1 次)

## 命題

同次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つ

証明: 同次連立 1 次方程式では $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$. 実際，$A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.
同次連立 1 次方程式の解の集合の直線や平面は原点を通る.

## 定義 (非自明な解)

同次方程式の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

# 同次連立 1 次方程式の解空間

## 定理 (同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69))

$A$ を $m \times n$ 行列とする.
$n$ 変数の同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (**) は

1. $n - \operatorname{rank} A = 0 \Rightarrow$ (**) の解は一意（自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみ）.
2. $n - \operatorname{rank} A > 0 \Rightarrow$ (**) の解は一意でない（非自明な解を持つ）

$n - \operatorname{rank} A$ を解の自由度という.

加藤 線形代数 例題 4, 練習 5(p.70), 章末問題 3(p.72)　mobius K2.3.50 mobius K2.3.70

| | $\operatorname{rank} A$ | $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $< \operatorname{rank} \tilde{A}$ | 自由度 $n - \operatorname{rank} A = 0$ | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ |
| 非同次 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ | 解なし (空集合) | 一意的 点 | 直線 | 平面 | | |
| 同次 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ | 起きない ケース | 一意的, 自明な解 $\boldsymbol{0}$ のみ 原点 | $\boldsymbol{0}$ を通る 直線 | $\boldsymbol{0}$ を通る 平面 | | |

L18-Q3

## Quiz(連立 1 次方程式の解全体の集合)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

とする.

1. 非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は解をもつか？ あるなら解の自由度を求めよう．解全体の集合を求め，$V = \mathbb{R}^2$ に描こう.
2. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ は非自明な解をもつか？ 解の自由度を求めよう．同次の解全体の集合を求め，$V = \mathbb{R}^2$ に描こう.

L18-Q4

## Quiz(連立 1 次方程式の解全体の集合)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

とする.

1. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ は非自明な解をもつか? 解の自由度を求めよう. 解空間を求めよう.
2. 非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 26 \\ 52 \\ 84 \end{bmatrix}$ は解をもつか? もつなら解の自由度を求めよう. 解全体の集合を求め $V = \mathbb{R}^3$ に描こう（Hint: 各平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ との共有点を求めよう）. 同次の解全体の集合もあわせて描こう.

# ここまで来たよ

18 2.3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- ◆同次連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解

19 3.1 基本行列と基本変形 | 第 3 章 行列の構造
- ◆基本行列|1. 基本行列と基本変形

# ◆基本行列 加藤 線形代数 p.75

$P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ はいずれも, 単位行列をちょっと変更した $m$ 次正方行列.
$P_{ij}, P_i$ の $i, j$ は基本行列の番号. $P_{ij} = [a_{k\ell}]$ の $k, \ell$ は行番号列番号.

$P_{ij}$ $(i \neq j)$

例: 3 次の $P_{12} = P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_{ij} = [a_{k\ell}]$ とすると,

$$a_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 - \delta_{ik} - \delta_{j\ell}) + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}.$$

$P_{ij} = P_{ji}$

$P_i(c)$

例: 3 次の $P_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_i(c) = [b_{k\ell}]$ とすると,

$$b_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 \cdot (1 - \delta_{ik}) + c \cdot \delta_{ik})$$

$P_{ij}(a)$ $(i \neq j)$

例: 3 次の $P_{23}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_{31}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

「2 行 3 列に 5, 3 行 1 列に 5」

$P_{ij}(a) = [c_{k\ell}]$ とすると,

$$c_{k\ell} = \delta_{k\ell} + a\delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

$P_{ij}(a) \neq P_{ji}(a)$

# ◆基本行列と行基本変形

加藤 線形代数 p.76

## 命題 (行基本操作 ↔ 基本行列の左からの積)

$m \times n$ 行列 $A$ の行基本操作は，$m$ 次の基本行列を左からかけるのと同じ

(R1) $P_{ij}$ を左からかける　$\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$, $i \neq j$
(R2) $P_i(c)$ を左からかける　$\textcircled{i} \times$ (定数$c$), $c \neq 0$
(R3) $P_{ij}(a)$ を左からかける　$\textcircled{j} \times$ (定数$a$) $+ \textcircled{i}$

加藤 線形代数 練習 2(p.77)

行基本変形 加藤 線形代数 p.48 線形代数☆演習 I(2024)L16 基本行列の積を左からかけるのと同じ

積の順序に大注意

「まず (R1), つぎに (R3)」は $P_{23}(a)(P_{12}A)$ なので, 行列の積 $Q = P_{23}(5)P_{12}$.

加藤 線形代数 例 1, 練習 3(p.77)

例

$$P_{12}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix}$$

例

$$P_{23}(5)\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix}$$

L19-Q1

## Quiz(基本行列)

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ を考える.

1. $A$ を行基本変形で簡約階段形にしよう.
2. 上で求めた行基本変形に現れた基本操作それぞれに対応する基本行列 $Q_1, Q_2, \ldots$ を，記号と成分で書こう ($Q_1$ が最後の基本操作に対応する).
3. 上で求めた基本行列の積を考え，基本変形に対応する行列 $Q$ を成分で求めよう.
4. $QA$ が簡約階段形であることを確かめよう.

# 3.2 正則行列 | 第 3 章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L20(2024-06-19 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-19 Wed 11:23 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §3.2 定理 2.2 正則行列の判定条件を適用できる
- 背理法による証明ができる



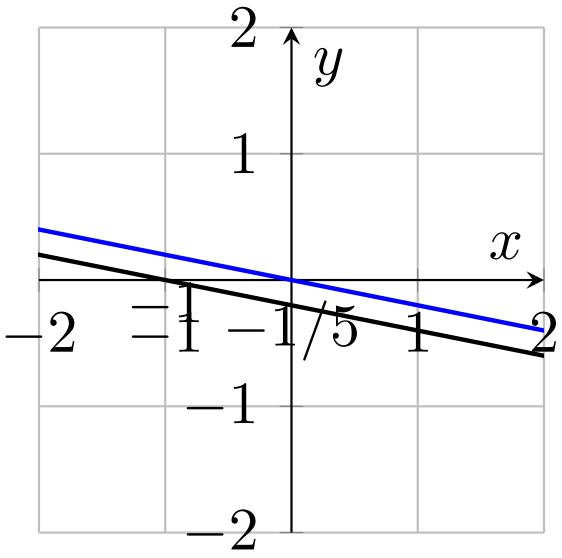
L19-Q1

## Quiz 解答: 連立 1 次方程式の解全体の集合

$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ で考える.

1. 拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{①\times\frac{1}{2} \\ ①\times(+1)+② \\ \rightarrow}}{} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 1$ より解をもつ. 解の自由度は $n - \operatorname{rank} A = 1$.
   解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t$ $(t \in \mathbb{R})$. 解全体の集合は
   $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$. (原点を通らない直線)
   直線と $y$ 軸 $x = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$, 直線と $x$ 軸 $y = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

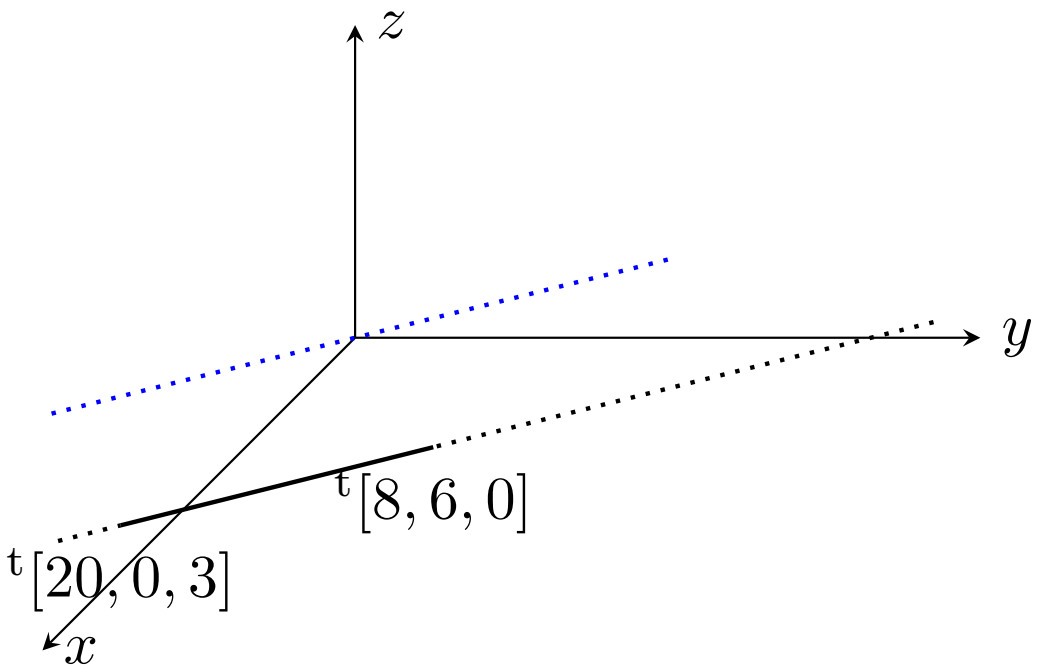
2. $\operatorname{rank} A = 1$, 解の自由度 $n - \operatorname{rank} A = 1$ より非自明な解をもつ．解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t$ $(t \in \mathbb{R})$. 解空間は $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t | t \in \mathbb{R} \right\}$. (原点を通る直線)




L19-Q2

Quiz 解答: 連立 1 次方程式の解全体の集合

1. $A \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\operatorname{rank} A = 2$. 変数の個数は $n = 3$ より解の自由度は $n - \operatorname{rank} A = 3 - 2 = 1 > 0$ なので非自明な解をもつ．解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$ $(t \in \mathbb{R})$. 解空間は原点を通る直線 $W = \{ \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t | t \in \mathbb{R} \}$.
2. 拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 26 \\ 2 & 6 & 4 & 52 \\ 3 & 10 & 8 & 84 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\operatorname{rank} \tilde{A} = 2$. $\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A$ より解をもつ．解の自由度は $n - \operatorname{rank} A = 3 - 2 = 1$. 解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$ $(t \in \mathbb{R})$.
解全体の集合は直線 $W_0 = \{ \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t | t \in \mathbb{R} \}$.
$W_0$ と $x = 0$ との交点は, $t = -2$ より $\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$, 同様に $y = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $z = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.
同次連立 1 次方程式の解空間 $W$ は，この直線 $W_0$ と平行で原点を通る直線.




L19-Q3

## Quiz 解答: 基本行列

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{①\leftrightarrow③}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{②\times\frac{1}{3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{②\times 2+①}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$
2. $A$ が $3 \times 2$ 行列なので, 3 次の基本行列を使う.
   [$Q_i$ の $i$ の命名方法は教科書にしたがった.

- ① $\leftrightarrow$ ③ : $Q_3 = P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ② $\times \frac{1}{3}$ : $Q_2 = P_2(\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- ② $\times 2 +$ ① : $Q_1 = P_{12}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. 3 次の正方行列の積を計算して，$Q = Q_1Q_2Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
4. 行列の積を計算して $QA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (= B)$.

# 復習: 正則行列

線形代数☆演習 I(2024)L12

## 定義 (正則行列と逆行列 加藤 線形代数 定義 3-2(p.32))

$n$ 次正方行列 $A$ に対して, $XA = AX = E$ となる $n$ 次行列が存在するとき, $A$ を正則行列 (non-singular matrix) といい, $X$ は $A$ の逆行列 (inverse matrix) であるといい $X = A^{-1}$ とかく.

$n = 2$ の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $\Delta = ad - bc \neq 0$ のとき正則で $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ だった.

## 定理 (正則行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-2(p.33))

積 $A, B$ が正則行列 ならば, $AB$ も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

逆 $A$ が正則行列 ならば, $A^{-1}$ も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.

転置 $A$ が正則行列 ならば, ${}^{\mathrm{t}}A$ も正則行列で, $({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$.

# ◆基本行列の正則性

## 定理 (基本行列の正則性 加藤 線形代数 定理 2-1(p.84))

- $n$ 次の基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n.\ i \neq j, c \neq 0)$ はすべて正則行列.
- 逆行列は次の通り.
  - ${P_{ij}}^{-1} = P_{ij}$.
  - $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$.
  - $P_{ij}(a)^{-1} = P_{ij}(-a)$.

「基本行列の逆行列はまた基本行列」

# 基本行列の正則性の証明 加藤 線形代数 p.84

下心 基本操作は可逆だから, 逆操作の行列が逆行列になってるはず.

加藤 線形代数 練習 1(p.85)

## 定理 (行基本変形定理 (その 2)) 加藤 線形代数 定理 1-1(p.77)

任意の $m \times n$ 行列 $A$ に対して, $B = Q_1 Q_2 \cdots Q_s A$ が簡約階段形の行列となるような $m$ 次の基本行列 $Q_1, \ldots, Q_s$ が存在する.

これは行基本変形定理 加藤 線形代数 定理 2-1(p.53) の言い換え

証明 最初の基本操作に対応する行列が $Q_s, \ldots,$ 最後の基本操作に対応する行列が $Q_1$.

## 系 (加藤 線形代数 定理 1-1(p.77) 定理 1-2(p.81) の系)

任意の $m \times n$ 行列 $A$ について,

- $QA$ が簡約階段行列となる $m$ 次正則行列 $Q$ が存在する.

一意ではない

証明 行基本変形定理の証明で, $Q = Q_1 \cdots Q_s$ とすると, $Q$ は正則行列の積なので, やはり正則行列.

「任意の行列は左から適当な正則行列をかけて簡約階段行列にできる」

# ◆正則行列の構造

## 定理 (正則行列の構造 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85))

$n$ 次正方行列について次の 4 つの条件は同値.

(a) $A$ は正則行列
(b) $\operatorname{rank} A = n$　　'フルランク', 簡約階段形が単位行列
(c) $A$ は有限個の基本行列の積に等しい
(d) 待て 加藤 線形代数 4 章 $\det A \neq 0$

mobius K3.2.50
実用的には，いつでも階段行列に基本変形して (b) で判定できる
「正則行列でない」の便利な十分条件: 次の補助定理，その系.

証明
補助定理 加藤 線形代数 例題 1, 練習 2, 練習 3(p.86) を準備した上で,
(a)⇒(b)⇒(c)⇒(a) を示す.
(a)⇒(b) 部分は, 対偶 (contraposition)「((b) でない)⇒((a) でない)」を示す.

# 補助定理

**命題** (加藤 線形代数 例題 1(p.86))

$n$ 次正方行列 $A$ について, $n$ 行目が ${}^t\mathbf{0}$ ならば $A$ は正則でない.

証明

## 系 (加藤 線形代数 (p.86))

$n$ 次正方行列 $A$ について,

-1 加藤 線形代数 例題 1(p.86) $n$ 行目が ${}^t\mathbf{0}$ ならば $A$ は正則でない.

0 加藤 線形代数 練習 2 $i$ 行目が ${}^t\mathbf{0}$ ならば $A$ は正則でない

1. 加藤 線形代数 練習 3 $i$ 行目と $j$ 行目 $(i \neq j)$ が一致するならば $A$ は正則でない
2. $i$ 行目が, $j$ 行目 $(i \neq j)$ の $c$ 倍ならば $A$ は正則でない
3. $j$ 行目の $a$ 倍を, $i$ 行目に加えたものが, $k$ 行目 $(k \neq i)$ に等しいならば $A$ は正則でない

一般に $n$ 次正方行列で $A, B$: 正則, $S, T$: 非正則とすると, $AB$ は正則, $AS, SA, ST$ は非正則)

# 証明の例

# 背理法 proof by contradiction

$p, q$: 命題.
$p \Rightarrow q$ を示そうとするときに,
「$q$」よりも「$q$ でない」のほうが簡単で,(条件として) 使いやすいとき,
に背理法がよく使われる
特に,「$q$」自身が「(有名な概念) でない」のとき,「$q$ でない」は「(有名な概念)」

## 背理法

- $q$ でない, とする
- $p$ とする.
- ⋮
- 過程
- ⋮
- 矛盾
- $q$ である.

## 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (b) でない $\Rightarrow$ (a) でない

「 (b) でない」すなわち $\operatorname{rank} A \neq n$ とする.

すなわち $\operatorname{rank} A < n$ とする.
正則な $P$ で簡約階段形 $PA$ にする. $PA$ の $n$ 行目は ${}^t\mathbf{0}$. 補助定理 加藤 線形代数 例題 1(p.86) より $PA$ は正則でない.

(ここ背理法) $A$ が正則とすると, 積 $PA$ も正則. 矛盾. よって, $A$ は正則でない.

$A$ は正則でない. すなわち,「 (a) でない」

## 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (b)⇒ (c)

(b) $\operatorname{rank} A = n$ とする
ある正則な $P = Q_1 \cdots Q_s$ で簡約階段化したとき, $PA = E$.
$A = P^{-1} = (Q_1 \cdots Q_s)^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$
これらはすべて基本行列 加藤 線形代数 定理 2-1(p.84).
よって基本行列の積で書ける (c)

## 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (c)⇒ (a)

(c) $A$ が有限個の基本行列の積で書けるとする.
基本行列は正則行列.
正則行列の積はまた正則行列.
よって $A$ は正則行列 (a)

# お知らせ

- trialL20 はレポート的．2024-06-21 金朝には trial はない．
  - 授業時間外に Mobius の 線形代数 > Trial > Trial L20 で個人別 2 問を取得し，この紙の表に簡約階段化，裏に連立 1 次方程式の答案を手書きで作成し，(授業中でなく) 次のいずれかの日時場所で提出してください．
    - ★ 2024-06-21 金 3, 28 金 3．1-609 数理情報基礎演習 A TA（相談可）
    - ★ 2024-06-25 火 3．1 – 507 オフィスアワー 樋口（相談可）
    - ★ 2024-06-24 月–28 金 12:40-13:25．1-536,1-538 Math ラウンジ チューター（どちらかの部屋に在室，相談可）
- (短い) レポート 1 学期途中の振り返り Moodle
  `https://learn.hig3.net`

# 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L21(2024-06-21 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-20 Thu 17:22 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.89 行基本変形を用いて正則か判定し逆行列を求められる
- 係数行列が正則なとき，逆行列を求めて連立 1 次方程式を解ける

# ここまで来たよ

20 3.2 正則行列 | 第 3 章 行列の構造

21 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造
- ◆逆行列と基本変形
- ◆逆行列の求め方
- 逆行列と連立 1 次方程式

# ◆逆行列と基本変形 加藤 線形代数 p,.88

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) より
任意の $n$ 次正則行列 $A$ は, $n$ 次基本行列のある積として次のように書ける…「$E$ に $Q_s,\ldots,Q_1$ の順に基本操作を適用すると $A$」

$$A = Q_1 \cdots Q_s E. \qquad (*)$$

(*) に，左から $Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \ldots, Q_s^{-1}$ の順にかけると次のようになる．

$$Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} A = E. \qquad (**)$$

$A$ に $Q_1^{-1},\ldots,Q_s^{-1}$ の順に基本操作 (逆操作) を適用すると $E$
(*) の，両辺の逆行列をとると次のようになる

$$A^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} E. \qquad (***)$$

$E$ に $Q_1^{-1},\ldots,Q_s^{-1}$ の順に基本操作 (逆操作) を適用すると $A^{-1}$
$Q = Q_1 \cdots Q_s, Q^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ とおく．

$$E \xrightarrow{Q} A \quad (*)$$
$$\updownarrow \text{逆変形}$$
$$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$$

$$A \xrightarrow{Q^{-1}} E \quad (**)$$
$$\updownarrow \text{同じ行基本変形}$$
$$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$$

## 逆行列を作る行基本変形 加藤 線形代数 p.89

任意の正則行列 $A$ について,
$A$ に施して $E$ を作る (簡約階段形にする) 行基本変形 $Q^{-1}$ を
$E$ に施すと,
$A^{-1}$ が作られる.

https://bit.ly/redmatrix



# ここまで来たよ

20 3.2 正則行列 | 第 3 章 行列の構造

21 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造
- ◆逆行列と基本変形
- ◆逆行列の求め方
- 逆行列と連立 1 次方程式

# ◆逆行列の求め方 加藤 線形代数 p.89

## 逆行列を求める筆算

$n$ 次の正方行列 $A$ が与えられたとき, $n \times (2n)$ 行列 $[A|E]$ を考え, **行**基本変形で (掃き出し法で) 簡約階段形にする.

$$[A|E] \to \cdots \to [E|B]$$

となったなら, $A$ は正則で, $B$ が求める逆行列 $B = A^{-1}$.

加藤 線形代数 例題 1(p.92)

## 「$A$ が正則であるかどうか調べ, 正則であればその逆行列を求めよ」

「逆行列の求め方」で, $[A|E]$ を簡約階段形に基本変形する. $[E|B]$ に到達したなら逆行列 $B = A^{-1}$ が得られる. $[E|B]$ に到達しないなら ($\operatorname{rank} A < n$ なら), 正則でない. 副産物として $\operatorname{rank} A$ が求まる.

`https://learn.hig3.net/` 動画 逆行列

mobius K3.3.10 加藤 線形代数 練習 3(p.92), 章末問題 4(p.94)

## Quiz(逆行列)

L21-Q1　　次の行列は正則か？ 正則なら逆行列を答えよう．正則でないなら理由を書こう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Quiz(逆行列)

L21-Q2　　次の行列は正則か？ 正則なら逆行列を答えよう．正則でないなら理由を書こう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

# 正則か？ の判定

ベースは「正則行列の構造」 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)

## 行列 $A$ が正則かどうかの，いつでも使える判定方法

- 正方行列 ($n$ 行 $n$ 列) であることが大前提.
- 階段形にして，階数 $\mathrm{rank}\,(A) = n$ なら正則，階数 $\mathrm{rank}\,(A) < n$(途中で見えちゃうこともある) なら正則でない.

## たまたま判定できるケース

- $n = 2$ なら，$\Delta = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は正則.
- $A$ にうまく行基本変形して，加藤 線形代数 例題 1, 練習 2, 練習 3(p.86) の形に持って行けるなら正則でない
- $XA = AX = E$ となる $X$ が見つかれば正則（もともとの定義）
- 加藤 線形代数 §4 になると，行列式 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$は正則 で便利に判定できる

# 復習: 掃き出し法

線形代数☆演習 I(2024)L17　加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分 $c$ を R2 ① $\times (1/c)$ で 1 にする
(4) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の $a$ を零にする
(10) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックのその列の上側を零にする
(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う
(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

# ここまで来たよ

20 3.2 正則行列 | 第 3 章 行列の構造

21 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造
- ◆逆行列と基本変形
- ◆逆行列の求め方
- 逆行列と連立 1 次方程式

# 逆行列と連立 1 次方程式

## 命題 (逆行列を利用した連立 1 次方程式の解)

連立 1 次方程式が，係数行列 $A$ が $n$ 次正則行列，定数項ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, 未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と書かれるならば，

1. 連立 1 次方程式は解を持ち，解の自由度は 0，解は一意．
2. 解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ である．

## 命題の長所短所

- ♠ 一般の場合 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65) よりも限られた状況 (未知数 $n$ 個=式の個数 $n$ 個，$A$ が正則) 仮定が強い
- ♡ 結論として具体的な解 $A^{-1}\boldsymbol{b}$ の情報が得られている
- ♡ $\boldsymbol{b}$ が変わっても同じ $A^{-1}$ で解が書ける
  - 「$[A|E]$ を簡約階段形にする」，は，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_n$ を一度に解いているようなものだから，すべての $\boldsymbol{b}$ に対する解をとらえている

## 命題の (略) 証明

1. 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65) で，$m=n$. $A$ が正則なので，加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) より $\operatorname{rank} A = n = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$ なので.
2. 加藤 線形代数 定義 3-2(p.32) より 逆行列 $A^{-1}$ が存在する．左から $A$,$A^{-1}$ をかけることにより

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

L21-Q3

## Quiz(逆行列と連立 1 次方程式)

正則行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ で書かれた次の連立 1 次方程式を解こう.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

mobius　K3.3.50

# 4.1 置換 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L22(2024-06-26 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-26 Wed 07:35 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §4.1 置換を説明できる
- 加藤 線形代数 §4.1 置換の符号を, 差積, 転倒数の計算から求められる

## Quiz 解答: 逆行列

$[A|E]$ は簡約階段形 $[E|A^{-1}]$ に基本変形 (省略) できて，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L21-Q1

$[A|E]$ は簡約階段形 $[E|A^{-1}]$ に基本変形 (省略) できて，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

L21-Q2

$A$ を階段形に基本変形 (省略) すると，$\operatorname{rank} A <$ 次数 より正則でない．

階数 2

L21-Q3

# Quiz 解答: 逆行列と連立 1 次方程式

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である.

1. $A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.
2. $A^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$.
3. $A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}a+b-c \\ \frac{2}{3}a-b+c \\ -\frac{2}{3}a+b \end{bmatrix}$.

# ここまで来たよ

21 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換

# ◆置換

## 定義 (置換 加藤 線形代数 p.98)

有限集合 $\{1,\ldots,n\}$ 上の変換 加藤 線形代数 pp.6,8,10,12,191– で, 1 対 1 加藤 線形代数 p.16, 上への写像 加藤 線形代数 p.15 になっているものを置換 (permutation) という.

加藤 線形代数 例 1(p.98) $X=\{1,\ldots,5\}$ の置換 $\sigma: X\to X$.

$$\sigma(x)=\begin{cases}3 & (x=1)\\ 5 & (x=2)\\ 2 & (x=3)\\ 4 & (x=4)\\ 1 & (x=5)\end{cases}$$

別の書き方 $\sigma: 1\mapsto 3, 2\mapsto 5, 3\mapsto 2, 4\mapsto 4, 5\mapsto 1$.
この $\sigma$ に対して $\sigma(2)=5$.

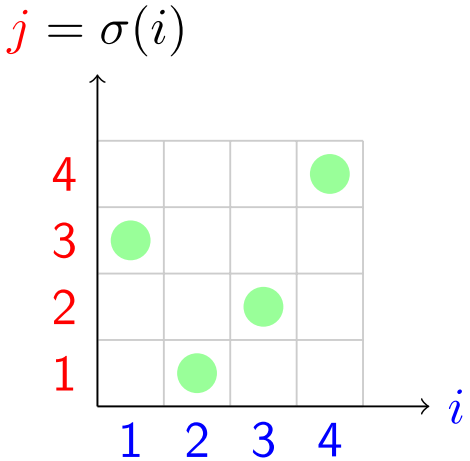
# 置換のグラフ

$n = 4, X = \{1, 2, 3, 4\}$.

例として $X$ の置換 $\sigma(x) = \begin{cases} 3 & (x = 1) \\ 1 & (x = 2) \\ 2 & (x = 3) \\ 4 & (x = 4) \end{cases}$

左が $j = \sigma(i)$ の 'グラフ'

- 変換であること: 各列に●が 1 個ある
- '1 対 1 かつ上への' 変換であること: 各行に●が 1 個ある




問: 逆変換$=\sigma^{-1}$ のグラフは?

## 置換の略記方法

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{pmatrix}.$$

(角括弧は行列, 丸括弧は置換)

- これらの数は,「番目」でなく, その数 $\in X$ を表す.
  $X = \{A, B, C, D, E\}$ でも同じことができる.
- 1 対 1 の変換=全単射であることから, 上下の行には同じ数がちょうど 1 回ずつでてくる.
- 置換を 1 個決めるごとに, 下の行に順列 (例)35241 がでてくる, という気分の記号.
- $\{1, \ldots, n\}$ の置換は, $n$ 個から $n$ 個を取り出す順列の個数 ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.

# ここまで来たよ

21 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換

# ◆置換の合成

## 定義 (置換の合成 加藤 線形代数 p.99)

$\sigma, \tau$: 置換.
合成変換 $\tau(\sigma(x)) = (\tau \circ \sigma)(x)$ のことを, 置換の合成 $\tau\sigma$ と書く.

$x$ に近い $\sigma$ が先に $x$ にあたる $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ と同じのり.
ふつうの「積」のように見えるが, 写像の合成なので, 行列同様 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.
略記 $\underbrace{\sigma \cdots \sigma}_{k} = \sigma^k$. $(k > 0)$

加藤 線形代数 例題 1(p.100), 練習 2(p.100)

L22-Q1

## Quiz(置換の合成)

集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$$

を考える.

1. 元 $\sigma\tau(3), \tau\sigma(3)$ を 求めよう.
2. 置換 $\sigma\tau, \tau\sigma$ を 求めよう.
3. 元 $\tau^{-1}(3)$ を求めよう.
4. 置換 $\tau^{-1}$ を 求めよう.

# ◆単位置換と逆置換|1. 置換

## 定義 (単位置換 加藤 線形代数 p.101)

恒等変換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という.

任意の置換 $\sigma$ に対して $\sigma e = e\sigma = \sigma$.

## 定義 (逆置換 加藤 線形代数 p.101)

$\sigma$ の逆変換 $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を $\sigma$ の逆置換という.

$(\tau\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\tau^{-1}$. (合成変換の逆変換の性質の反映) mobius　K4.1.10

なんか行列の積に似てる…

「$X$ の置換全体は $X$ の対称群 (symmetric group) $S_n$ という群 (group) をなす. $n$ 次正則行列全体は群 GL($n$) をなす」　代数入門 (3 年)

略記 $\underbrace{\sigma^{-1}\cdots\sigma^{-1}}_{k} = \sigma^{-k}$. $(k > 0)$. $\sigma^0 = e$.

# ここまで来たよ

21 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換

# ◆置換の符号

## 定義 (差積 加藤 線形代数 p.102)

$n$ 変数 $(x_1, \ldots, x_n)$ の差積とは, 多項式

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

$n \times n$ 個のペア $(i, j)$ のうち, $n(n-1)/2$ 個の積.

加藤 線形代数 例 4(p.103)

## 定義 (総積の記号)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

$\Sigma$ for Sum, $\Pi$($\pi$ の大文字) for Product.

例 $\prod_{k=1}^{n} k = n!, \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n n!$.

L22-Q2

## Quiz(置換と添字)

関数変数 $\{x_i | i = 1, 2, 3\}$ の関数 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ を考える.
$\{1, 2, 3\}$ の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を考える.

1. $f(x_2, x_3, x_1)$ を求めよう.
2. $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ を求めよう.
3. $f(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, x_{\tau\sigma(3)})$ を求めよう.

## 定義 (置換の符号 加藤 線形代数 定義 1-1(p.103))

$\{1, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma$ について

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \frac{D(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \pm 1$$

を $\sigma$ の符号 (signature) という.

ここで定義した符号 (signature) とは, 署名や指紋や血液型のような, $\sigma$ を特徴で区別する量のこと. たまたま整数値 $\pm 1$ をとる. '正', '負' のいずれかになるもの (符号, サイン (sign)) ではない.

加藤 線形代数 p.105

## 定義 (偶置換奇置換)

- 符号が $+1$ の置換を偶置換,
- 符号が $-1$ の置換を奇置換という.

# ここまで来たよ

21 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換

# 置換の符号の性質

**定理 (置換の符号の合成公式** 加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105)**)**

置換 $\sigma, \tau$, 単位置換 $e$ に対して,

- $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \times \operatorname{sgn}(\tau)$　(*)
- $\operatorname{sgn}(e) = 1$.
- $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sgn}\sigma)^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$.

「sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」　代数入門

(*) の証明 符号の定義の分母をはらって,

$$D(x_{\tau(1)}, \ldots) = \operatorname{sgn}(\tau) \times D(x_1, \ldots) \qquad (**)$$

の両辺にはそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ が現れている. $x_1 = y_{\sigma(1)}, \ldots, x_n = y_{\sigma(n)}$ を代入する.

$$\text{右辺} = \operatorname{sgn}(\tau) \times D(y_{\sigma(1)}, \ldots) \overset{(**)}{=} \operatorname{sgn}(\tau) \times \operatorname{sgn}(\sigma) D(y_1, \ldots)$$

$$\text{左辺} = D(y_{\sigma(\tau(1))}, \ldots) = \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \times D(y_1, \ldots)$$

# 置換の符号の別の特徴づけ

## 定義 (転倒数 加藤 線形代数 例題 3(p.104))

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma$ に対して,
$X$ の要素の $n(n-1)/2$ 個のペア $(i, j)$ $(i < j)$ のうち, $\sigma(i) > \sigma(j)$ であるものの個数を,
$\sigma$ の転倒数 という.

## 命題

$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sigma \text{ の転倒数}}$.

加藤 線形代数 練習 5(p.104) mobius K4.1.20, K4.1.30

例 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
ペア $(2,3)$ は $\sigma(2) = 4 > \sigma(3) = 3$.
ペア $(2,4)$ は $\sigma(2) = 4 > \sigma(4) = 2$.

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)$$
$$(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)$$
$$(x_3 - x_4).$$
$$D(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(4)})$$
$$(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)})$$
$$(x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}).$$
$$= (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$$
$$(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$
$$(x_2 - x_3).$$

# ◆偶置換と奇置換|1. 置換

**定理** (加藤 線形代数 定理 1-2(p.106))

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換を考える $(n \geq 2)$.

- 置換全体は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.
- 偶置換は $n!/2$ 個ある.
- 奇置換は $n!/2$ 個ある.

**証明** $\tau = (1\ 2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots \end{smallmatrix}\right)$ を固定する. $\tau^{-1} = \tau$. $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.
$X$ の置換全体の集合 $S_n$ の上の変換 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ を考えると, これは 1 対 1.

**例** $n = 4$

| $\sigma$ | $\leftrightarrow (1\ 2)\sigma$ |
|---|---|
| $e = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ | $(1\ 2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ |
| $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ | $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ |
| $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ | $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ |
| $\vdots$(計 12) | $\vdots$(計 12) |
| 偶置換 | 奇置換 |

# 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L23(2024-06-28 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-28 Fri 11:23 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §4.1(pp.105,106) 巡回置換と互換を説明できる
- 加藤 線形代数 §4.2(p.107) 行列式の定義を説明でき，計算できる
- 加藤 線形代数 §4.2(p.110) 行列式の行多重線形性・行交代性を説明できる

## L22-Q1
## Quiz 解答: 置換の合成

1. $\sigma\tau(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(1) = 2 \in X$, $\tau\sigma(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(3) = 1 \in X$.
2. $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$.
3. $\tau^{-1}(3) = 2 \in X$.
4. $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$.

## L22-Q2
## Quiz 解答: 置換と添字

1. $f(x_2, x_3, x_1) = 2x_2 + 3x_3 + 5x_1$
2. $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = 2x_{\sigma(1)} + 3x_{\sigma(2)} + 5x_{\sigma(3)} = 2x_2 + 3x_1 + 5x_3$.
3. $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ より, $f(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, x_{\tau\sigma(3)}) = 2x_{\tau\sigma(1)} + 3x_{\tau\sigma(2)} + 5x_{\tau\sigma(3)} = 2x_1 + 3x_3 + 5x_2$.

# ここまで来たよ

22 連立 1 次方程式と 1 次変換 | 第 3 章 行列の構造
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換|1. 置換

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式

# 置換の符号の性質

## 定理 (置換の符号の合成公式 加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105))

置換 $\sigma, \tau$, 単位置換 $e$ に対して,

- $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \times \operatorname{sgn}(\tau)$　(*)
- $\operatorname{sgn}(e) = 1$.
- $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sgn}\sigma)^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$.

「sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」　代数入門

(*) の証明 符号の定義の分母をはらって,

$$D(x_{\tau(1)}, \ldots) = \operatorname{sgn}(\tau) \times D(x_1, \ldots) \qquad (**)$$

の両辺にはそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ が現れている. $x_1 = y_{\sigma(1)}, \ldots, x_n = y_{\sigma(n)}$ を代入する.

$$\text{右辺} = \operatorname{sgn}(\tau) \times D(y_{\sigma(1)}, \ldots) \overset{(**)}{=} \operatorname{sgn}(\tau) \times \operatorname{sgn}(\sigma) D(y_1, \ldots)$$

$$\text{左辺} = D(y_{\sigma(\tau(1))}, \ldots) = \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \times D(y_1, \ldots)$$

# ここまで来たよ

22 連立 1 次方程式と 1 次変換 | 第 3 章 行列の構造
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換|1. 置換

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式

# 巡回置換と互換

## 定義 (巡回置換)

$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$1 \leq k \leq n$ とする．次の形の $X$ の置換を巡回置換 (cyclic permutation) という．

$$\begin{aligned}
\sigma(i_1) &= i_2, \\
\sigma(i_2) &= i_3, \\
&\vdots \\
\sigma(i_{k-1}) &= i_k \\
\sigma(i_k) &= i_1, \\
\sigma(i) &= i \quad (\text{他の } i \text{ つまり} i \neq i_1, \ldots, i_k)
\end{aligned}$$

例 $n = 5, k = 3$ で $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

略記 上の巡回置換を $(4\ 1\ 5) = (1\ 5\ 4) = (5\ 4\ 1)$ と略記する．

## 定義 (互換 加藤 線形代数 例 5(p.105))

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma$ で，ある $i_1, i_2 \in X$ $(i_1 \neq i_2)$ で

$$\begin{aligned} \sigma(i_1) &= i_2, \\ \sigma(i_2) &= i_1, \\ \sigma(i) &= i \quad (i \neq i_1, i_2) \end{aligned}$$

の形のものを 互換 (transposition) といい，$(i_1\ i_2)$ と略記する．

互換は長さ 2 の巡回置換．

## 事実 (加藤 線形代数 例 5(p.105))

互換は奇置換

例 $X = \{1, \ldots, 5\}$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 5)$. 転倒数=

例 $X = \{1, \ldots, 5\}$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2\ 4) = (i\ j)$.

$$
\begin{aligned}
& D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\
&= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5) \\
&\quad (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5) \\
&\quad (x_3 - x_4)(x_3 - x_5) \\
&\quad (x_4 - x_5). \\
& D(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) \\
&= (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(5)}) \\
&\quad (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(5)}) \\
&\quad (x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(5)}) \\
&\quad (x_{\sigma(4)} - x_{\sigma(5)}) \\
&= (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x_5) \\
&\quad (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_5) \\
&\quad (x_3 - x_2)(x_3 - x_5) \\
&\quad (x_2 - x_5).
\end{aligned}
$$

転倒数=赤い因子の個数は 縦 $(j-i)$+ 横 $(j-i) - 1 =$ 奇.

# 置換の符号の別の特徴づけ

加藤 線形代数 なし

## 定理 (置換の符号の特徴づけ)

置換 $\sigma$ が,
$k$ 個の互換 $\tau_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ の積 $\sigma = \tau_k \ldots \tau_1$ として書けるとき,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

業界用語: 特徴づけ=characterization, defining property. 定義と同値で, こちらを定義にしてもよいような性質のこと.

こちらを定義にする場合, 先に well-definedness を確かめる必要がある

- すべての置換は, 互換の合成として書ける
- 互換の個数の偶奇は, 互換の合成の表し方によって変わらない

前半部分 (書けること)

**事実** (加藤 線形代数 章末問題 1(p.133))

すべての置換は巡回置換の合成で書ける.

**事実**

長さ $k$ の巡回置換は, $k-1$ 個の互換の合成で書ける.

加藤 線形代数 例 6, 練習 6(p.106)

よって, 巡回置換は, 長さ $k$ が偶数なら奇置換, 奇数なら偶置換.

**事実** (加藤 線形代数 章末問題 2(p.133))

すべての置換は互換の合成で書ける.

# ここまで来たよ

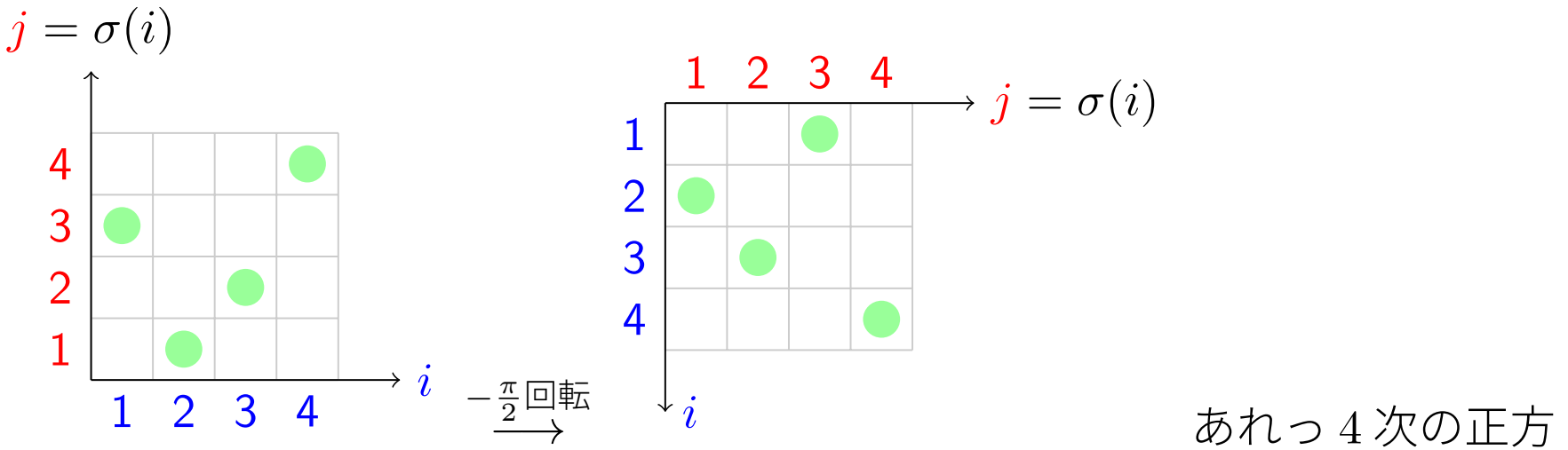
22 連立 1 次方程式と 1 次変換 | 第 3 章 行列の構造
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換|1. 置換

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式

# 互換のグラフ

$n = 4, X = \{1, 2, 3, 4\}$.
例として $X$ の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
左が $j = \sigma(i)$ の ‘グラフ’

- 変換であること: 各列に●が 1 個ある
- ‘1 対 1 かつ上への’ 変換であること: 各行に●が 1 個ある




あれっ 4 次の正方行列?

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma$ は, $n$ 次の正方行列の, 特定パターンの $n$ 個の成分● $(i, \sigma(i))$ $(i = 1, \ldots, n)$ の選択を指定する.
問: $\sigma^{-1}$ のグラフは?

# ◆行列式の定義

**定義 (行列式 (Determinant)** 加藤 線形代数 定義 2-1(p.107)**)**

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して,

$$\det A = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\text{置換●}) \cdot \text{成分●の積} = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

を $n$ の行列式 (determinant) という. $\sum$ は $n!$ 個の置換全ての和.

用語の注意：「行列式」は「あんパン」のようなもの．あんのことをあんパンと言ったら詐欺．行列式は行列ではない（スカラーである）．

邪悪な記法

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}.$$

$|\ \ |$ は絶対値, $|\ \ |$ は行列式. $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right| = |-2| = 2.$

# 行列式の直接計算の例

加藤 線形代数 例 1–4(pp.107-109)

## 例 0

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

## 例 1 $n = 2$

加藤 線形代数 練習 1(p.108), 章末問題 3(1)(p.133)

加藤 線形代数 p.34

$2! = 2$ 項

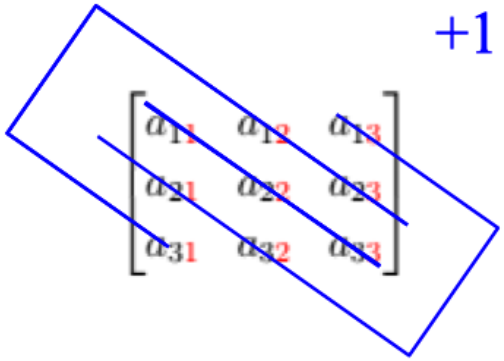
$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \Delta$$

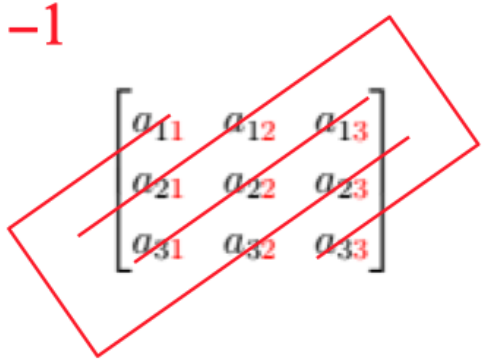
例 2 $n = 3$ 加藤 線形代数 練習 2(p.109), 章末問題 3(2)(p.133) $3! = 6$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

サラスの公式

加藤 線形代数 図 2(p.108)



## 対角行列の行列式

対角行列の行列式は対角成分の積で与えられる．特に $\det(E) = 1$.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

証明：和は $\sigma = \mathrm{e}$(恒等置換) のみ．mobius　K4.2.10

例 3

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} = \mathrm{sgn}(2\ 3) 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = -1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

$n = 4$ では「サラスの公式」的なものは作れない．V 的な置換が拾えない．行列式の定義をそのまま使うしかない．正しくは $4! = 24$ 項の和だが「サラスの公式」的なものを誤適用すると 8 項になってしまう．

## Quiz(行列式)

次の行列式の値を求めよう.

- $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

# ここまで来たよ

22 連立 1 次方程式と 1 次変換 | 第 3 章 行列の構造
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換|1. 置換

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式

# ◆行列式の行多重線形性

**定理 (行多重線形性** 加藤 線形代数 定理 2-1(p.110)**)**

$A$: $n$ 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, 第 $i$ 行に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

$f(x)$ の線形性 (linearity): $f(kx + \ell y) = kf(x) + \ell f(y)$ が成り立つこと.
多重線形性 (multi-linearity): $f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \det {}^t[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ のどの引数についても線形性を持つこと. mobius K4.2.70
証明 $i = 1$ で一般性を失わない.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(kb_{\sigma(1)} + \ell c_{\sigma(1)})a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= k \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &+ \ell \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) c_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \text{右辺}. \end{aligned}$$

L23-Q1

## Quiz(行列式の行多重線形性)

次の行列式を，行多重線形性を利用して，対角行列の行列式に帰着させて計算しよう．

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70

# ◆行列式の行交代性

## 定理 (行列式の行交代性 加藤 線形代数 定理 2-2(p.111))

$A$: $n \times n$ 行列,
$\boldsymbol{a}_i = [\, a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in} \,]$: $A$ の第 $i$ 行ベクトル

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = (-1) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化 (特殊な場合 $\tau =$ 互換, として上を含む)

## 定理 (行列式の行の置換のもとでの変換 加藤 線形代数 定理 2-3(p.112))

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

## 一般化のほうの証明

左辺の $\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$ を変形して, 右辺の形に持っていく.

あえて, $\sigma(i) = \sigma\tau^{-1}\tau(i)$ と書く.

$$\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma\tau^{-1}\tau(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma\tau^{-1}\tau(n)}$$

行番号 $\tau(i) = 1, 2, 3,$ で積の順をソート

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)}$$

合成置換 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ とおく. $\sigma$ の和を $\rho$ の和で置き換え ($\sigma \mapsto \sigma\tau^{-1}$ は置換の全単射)

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}$$

加藤 線形代数 定理 1-1(p.104) より

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = \text{右辺}.$$

L23-Q2

## Quiz(行列式の行交代性)

次の行列 $A$ の行列式 $\det A$ を，行の置換に対する性質 (行交代性の一般化) を利用して，対角行列の行列式と置換の符号に帰着させて計算しよう．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70

# 4.2 行列式 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L24(2024-07-03 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-03 Wed 07:13 JST hig"

今日の目標

- 行列式の列多重線形性, 交代性を説明できる
- 転置の行列式, 行列式の積公式を利用できる
- 行列式を, 定義と性質を使って計算できる

## TA Prob and Sol: 行列式

次の行列式の値を求めよう.

- $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

### 略解

1. $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -13.$

2. サラスの公式より,
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 5 - 0 - 5 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 =$$
$0 + 9 + 25 - 0 - 10 - 6 = 18.$
3. 行列式の定義から計算すると，$\sum_\sigma$ のうち non-zero なのは $\sigma = (2\ 3)$ の項のみ.
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}((2\ 3))2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = -210.$$
別解行列式の行交代性を使って,
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}((2\ 3)) \times \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ のように対角行列の行列式に帰着させてもよい.

L23-Q1

## Quiz 解答: 行列式の行多重線形性

$\boldsymbol{a}_2 = 3\begin{bmatrix}0&1&0&0\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}$ より,

$$\det\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&11\\0&0&5&0\\0&0&0&7\end{bmatrix} = 3\det\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&7\end{bmatrix} + 11\det\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&5&0\\0&0&0&7\end{bmatrix}.$$

第 1 項は対角行列の行列式. 第 2 項は, どのような $\sigma$ に対しても, $a_{\sigma^{-1}(2)2} = 0$ より zero で. 行列式の値は和で, $3\cdot 2\cdot 1\cdot 5\cdot 7 + 11\cdot 0$.

# ここまで来たよ

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

24 4.2 行列式 | 第 4 章 行列式
- ◆多重線線形性と交代性|2. 行列式
- 行列式のいろいろな性質
- ◆列基本変形|1. 基本行列と基本変形

# ◆行列式の行交代性

## 定理 (行列式の行交代性 加藤 線形代数 定理 2-2(p.111))

$A$: $n \times n$ 行列,
$\boldsymbol{a}_i = [\, a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in} \,]$: $A$ の第 $i$ 行ベクトル

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = (-1) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化 (特殊な場合 $\tau =$ 互換, として上を含む)

## 定理 (行列式の行の置換のもとでの変換 加藤 線形代数 定理 2-3(p.112))

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

## 一般化のほうの証明

左辺の $\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$ を変形して, 右辺の形に持っていく.
あえて, $\sigma(i) = \sigma\tau^{-1}\tau(i)$ と書く.

$$\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma\tau^{-1}\tau(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma\tau^{-1}\tau(n)}$$

行番号 $\tau(i) = 1, 2, 3,$ で積の順をソート

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)}$$

合成置換 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ とおく. $\sigma$ の和を $\rho$ の和で置き換え ($\sigma \mapsto \sigma\tau^{-1}$ は置換の全単射)

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}$$

加藤 線形代数 定理 1-1(p.104) より

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = \text{右辺}.$$

L24-Q1

## Quiz(行列式の行交代性)

次の行列 $A$ の行列式 $\det A$ を，行の置換に対する性質 (行交代性の一般化) を利用して，対角行列の行列式と置換の符号に帰着させて計算しよう．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70

# ◆多重線線形性と交代性 (前回の復習)

加藤 線形代数 定理 2-1(p.110)

## 定理 (行多重線形性)

$A$: $n$ 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, ある行 $i$ に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 定理 2-3(p.112)

## 定理 (行列式の行の置換のもとでの変換)

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

# 行列式がゼロになる場合

## 系 (加藤 線形代数 定理 2-1,2,3(pp.110-112)の系)

$A$: $n$ 次の正方行列
$\boldsymbol{a}_i$: $i$ 行目の行ベクトル

- $(\exists i \text{ s.t.} \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}) \Rightarrow \det A = 0.$
- $(\exists i, j (i \neq j), c \in \mathbb{R} \text{ s.t.} \boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a}_j) \Rightarrow \det A = 0.$

mobius K4.2.90
s.t.=such that
$\exists x$s.t.条件：条件を満たすような $x$ が存在する.

- 置換に関する和で書いた定義から
- $c = 0, 1$ はやさしい. $c \neq 0, 1$ の場合も多重線形性で $c = 1$ に帰着.

# ここまで来たよ

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

24 4.2 行列式 | 第 4 章 行列式
- ◆多重線線形性と交代性|2. 行列式
- 行列式のいろいろな性質
- ◆列基本変形|1. 基本行列と基本変形

# 行列式のいろいろな性質

行列式は，正方行列に実数を対応させる写像
正方行列にはいろいろな変換や演算や性質があった．それらのもとで，
行列式はどう振る舞うのか，を問うのは自然

- ${}^{\mathrm{t}}A$
- $kA$
- $A+B$
- $AB$
- $A^{-1}$
- $A$ が正則・(反) 対称・〔ブロック〕対角・上 (下) 三角のとき
- ⋮

# ◆転置行列の行列式

**定理 (転置行列の行列式** 加藤 線形代数 定理 2-4(p.113)**)**

$\det({}^{\mathrm{t}}A) = \det(A).$

行列の転置の行列式は，元の行列の行列式

証明

$$\begin{aligned}
\det({}^{\mathrm{t}}A) &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&\overset{\text{積の並び替え}}{=} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&\overset{\tau=\sigma^{-1}\text{と定義}}{=} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau^{-1}) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&\overset{\text{逆置換の符号}}{=} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det(A).
\end{aligned}$$

# ◆行列式の積公式

**定理 (行列式の積公式** 加藤 線形代数 定理 2-7(p.116)**)**

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

積の行列式は，行列式の積 mobius K4.2.90

証明ブロック分けでの積 加藤 線形代数 p.27

$$\det(AB) \overset{\text{ブロック分け}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{ブロックの計算}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{1n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ a_{21}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{2n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{2\text{ 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1+\cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{3,\cdots,n\text{ 行目の行多重線形性}}{=\cdots=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{i_n} \end{bmatrix}$$

(*) $n^n$ 個の和のうち, 行が重複して行列式が 0 にならない条件から, 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対応する $n!$ 個だけ残る.

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{\sigma(1)} \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{行交代性}}{=} \Big(\sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\operatorname{sgn}(\sigma)\Big)\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{定義}}{=} \det A \det B.$$

## 補題 (単位行列の行列式 加藤 線形代数 例 4(p.109))

$\det(E) = 1.$

## 命題 (スカラー倍の行列式)

$k \in \mathbb{R}$, $n$ 次正方行列 $A$ に対して,

$$\det(kA) = \det(kEA) = \det(kE)\det A = k^n \det A$$

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) の系

## 系 (逆行列の行列式 加藤 線形代数 系 2-2(p.118) )

$A$ が正則行列ならば
$\det(A) \neq 0.$
$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

(正則なら) 逆行列の行列式は，行列式の逆数
「$\det$ は, $n$ 次の正則行列全体から, 乗法群 $\mathbb{R}_{\neq 0}$ への群準同型写像である」

L24-Q2

## Quiz(行列式の性質を使った計算)

$A, B$ を $n$ 次正則行列，$E$ を $n$ 次単位行列とする．
$\det(A) = p, \det(B) = q, \det(A+E) = r, \det(B+E) = s, \det(A+B) = t$ とする．

1. 次の行列式を を $p, q, r, s, t, n$ で表そう．
   1. $\det(({}^{\mathrm{t}}A)^{-2})$.
   2. $\det(A^5 + A^4)$.
   3. $\det(2E)$.
   4. $\det(3\,{}^{\mathrm{t}}ABA^{-1}B^2)$
2. 行列の式 $A^2(A+B)A^{-2}$ を展開して簡単化しよう．
3. 行列式 $\det(A^2(A+B)A^{-2})$ を $p, q, r, s, t, n$ で表そう（展開しないほうがいいかも）
4. 行列の式 $B^{-1}(BA+A)B$ を展開して簡単化しよう．
5. 行列式 $\det(2B^{-1}(BA+A)B)$ を $p, q, r, s, t, n$ で表そう（展開しないほうがいいかも）

# ここまで来たよ

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

24 4.2 行列式 | 第 4 章 行列式
- ◆多重線線形性と交代性|2. 行列式
- 行列式のいろいろな性質
- ◆列基本変形|1. 基本行列と基本変形

# ◆列基本変形

## 定義 (行列の列基本操作 (elementary column operations) 加藤 線形代数 p.78)

$\boxed{i}, \boxed{j}$ は行列の列番号

(C1) $\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$, $i \neq j$
(C2) $\boxed{i} \times$ (定数$c$), $c \neq 0$
(C3) $\boxed{j} \times$ (定数$a$) $+ \boxed{i}$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column
これらは可逆
列基本変形 列基本操作を繰り返して行列を変形すること

加藤 線形代数 練習 4(p.78)

# ◆基本行列と列基本変形 加藤 線形代数 p.79

## 命題 (列基本操作 $\leftrightarrow$ 基本行列の右からの積)

$m \times n$ 行列 $A$ に対して, 列基本操作は $n$ 次の基本行列を右からかけるのと同じ

(C1) $P_{ij}$ を右からかける
(C2) $P_i(c)$ を右からかける
(C3) $P_{ji}(a)$ を右からかける $j \times$ (定数$a$) $+ i$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} P_{12}(2) =$$

加藤 線形代数 練習 5(p.80)

列基本変形 基本行列の積を右からかけるのと同じ
「まず (C1), つぎに (C3)」は $(AP_{12})P_{23}(5)$ なので, 行列の積
$P = P_{12}P_{23}(5)$.

加藤 線形代数 練習 6(p.80)

# 列多重線形性と列交代性

**定理** (加藤 線形代数 定理 2-5, 2-6(p.115))

「列についても行と同様に多重線形性, 交代性加藤 線形代数 定理 2-1,2,3がなりたつ」

**定理** (加藤 線形代数 練習 5(p.116))

「列についても，行と同様な $\det A = 0$ の十分条件加藤 線形代数 系 2-1(p.112)がある」

行列式にとって, 行と列は同じ性質を持つ

mobius K4.2.70, K4.2.80

L24-Q3

## Quiz(行列式の行多重線形性・行交代性)

次の行列 $A$ の行列式 $\det A$ を，行（または列）多重線形性，行（列）交代性，対角行列の行列式を利用して計算しよう．行列式の定義からも計算してみよう．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70

# 4.3 行列式の計算 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L25(2024-07-05 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-05 Fri 12:38 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §4.3 行列式を, 行基本変形で簡約階段化することで計算できる
- 加藤 線形代数 §4.3 行列式を, 行基本変形で階段化やその他の方法で楽に計算できる

L24-Q1

## Quiz 解答: 行列式の行交代性

$$\det A = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし，$\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ は互換で $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$ より，$\det A = -1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1$.
別解 $\det A = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{4\sigma(4)}$ と書いたとき，$a_{i\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ がすべて zero でないのは，$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ のみ.

L24-Q2

## Quiz 解答: 行列式の性質を使った計算

1. 
   1. $\det((\,{}^{\mathrm{t}}A)^{-2}) = \det((\,{}^{\mathrm{t}}A))^{-2} = \det(A)^{-2} = p^{-2}$.
   2. $\det(A^5 + A^4) = \det((A+E)A^4) = \det(A+E)\det(A)^4 = p^4 r$.
   3. $\det(2E) = 2^n \det(E) = 2^n$.
   4. $\det(3\,{}^{\mathrm{t}}ABA^{-1}B^2) = \det(3E\,{}^{\mathrm{t}}ABA^{-1}B^2) =$
      $\det(3E)\det(\,{}^{\mathrm{t}}A)\det(B)\det(A)^{-1}\det(B)^2 = 3^n pqp^{-1}q^2 = 3^n q^3$.
2. $A^2(A+B)A^{-2} = A + A^2BA^{-2}$.

3. $\det(A^2(A+B)A^{-2}) = \det(A)^2 \det(A+B) \det(A)^{-2} = t.$
4. $B^{-1}(BA+A)B = AB + B^{-1}AB.$
5. $\det(2B^{-1}(BA+A)B) = \det(2EB^{-1}(B+E)AB) =$
   $\det(2E) \det(B)^{-1} \det(B+E) \det(A) \det(B) = 2^n sp.$

# ここまで来たよ

24 4.2 行列式 | 第 4 章 行列式

25 4.3 行列式の計算 | 第 4 章 行列式
- ◆還元定理|3. 行列式の計算

# ◆還元定理

還元=reduction, 還元する=小さいものに帰着させる?

## 定理 (行列式の還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119))

$(1,(n-1))\times(1,(n-1))$ にブロック分けされた行列 $A$ に対して，下の様に一部分が 0 であるとき，行列式はブロック $A'$ の行列式に帰着される.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & * \cdots * \\ \mathbf{0} & A' \end{bmatrix} = a_{11} \det(A').$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ * & A' \end{bmatrix} = a_{11} \det(A').$$

## 証明

$\det(A) = \det({}^{t}A)$ より後者だけ証明すれば十分.

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$a_{1i}$ は，$i = 1$ の $a_{11}$ 以外 0. つまり $\sigma(1) = 1$ でない $\sigma$ は成分の積が 0 になる. $\{2, \cdots, n\}$ の置換を $\sigma'$ と書き

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{11} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\
&= a_{11} \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\
&= a_{11} \times \det(A').
\end{aligned}$$

加藤 線形代数 練習 2(2)(p.102)

## 系 (上三角行列・下三角行列の行列式 加藤 線形代数 系 3-1(p.120))

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次の上三角行列のとき，行列式は対角成分の積.

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

### 証明 ($n$ に関する数学的帰納法)

- $n = 1$ のとき, $\det A = a_{11}$.
- $n = k$ **のとき正しいと仮定する.**
  $n = k+1$ のとき, 還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(1) より, $\det A = a_{11} \det A'$.
  $A'$ は $k$ 次の上三角行列なので, 帰納法の仮定より, $\det A' = \prod_{i=2}^{k+1} a_{ii}$.
  よって, $\det A = \prod_{i=1}^{k+1} a_{ii}$. **すなわち,** $n = k+1$ **のときも正しい.**

下三角行列についても同様 下三角は上三角の転置だから

加藤 線形代数 定理 2-4(p.113).

対角行列は，これの特殊な場合 加藤 線形代数 例 4(p.109)　　特殊 ← 一般

# 基本変形と行列式

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) $A, B$: $n$ 次の正方行列に対して,
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85),pp.87,88 任意の正則行列 $A$ は基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ で $E$ に簡約階段化される (どの $P$ かは, 逆行列を求めるのと同じ過程でわかる).

$$
\begin{aligned}
P_1 P_2 \dots P_s A &= E \\
A &= P_s^{-1} \dots P_1^{-1} E \\
\det(A) &= \det(P_s)^{-1} \dots \det(P_1)^{-1} \det(E)
\end{aligned}
$$

$A$ の行列式は，簡約階段化に使った基本行列の行列式の逆数の積

# 基本行列の行列式

L25-Q1

## 基本行列の行列式 加藤 線形代数 定理 3-2(p.121)

基本行列 加藤 線形代数 p.75 の行列式を求めよう.

1. $\det(P_{ij}) = ?$
2. $\det(P_i(c)) = ?$
3. $\det(P_{ij}(a)) = ?$

加藤 線形代数 定理 3-2(p.121)

mobius K4.2.70, mobius K4.2.90

# 基本行列をかける = 基本操作する

## 定理 (基本操作と行列式 加藤 線形代数 定理 3-3(p.122))

$A$ に次の基本操作をして得た行列を $B$ とする.
$A \overset{R,C}{\to} B$.

| | 基本行列 | | 行列式 | |
|---|---|---|---|---|
| 行基本操作 R1 | $P_{ij}$ | $i \leftrightarrow j$ | $\det A =$ | $(-1) \times \det B$ |
| 行基本操作 R2 | $P_i(c)$ | $i \times c$ | $\det A =$ | $\frac{1}{c} \times \det B$ |
| 行基本操作 R3 | $P_{ij}(a)$ | $j \times a + i$ | $\det A =$ | $\det B$ |
| 列基本操作 C1 | $P_{ij}$ | $i \leftrightarrow j$ | $\det A =$ | $(-1) \times \det B$ |
| 列基本操作 C2 | $P_i(c)$ | $i \times c$ | $\det A =$ | $\frac{1}{c} \times \det B$ |
| 列基本操作 C3 | $P_{ji}(a)$ | $j \times a + i$ | $\det A =$ | $\det B$ |

L25-Q2

## Quiz(行列式)

行基本変形で階段行列に直すことにより，次の行列式を求めよう．

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

mobius K4.3.10 https://bit.ly/redmatrix

# あいまいさのないアルゴリズム

入力: $n$ 次正方行列 $A$，出力: 行列式
行列式を $=$ でつないで計算していく．定数倍がでたときはそれを記す．

- (逆行列を求めるのと同じ) 行基本変形で (簡約) 階段形にしていく
- 許される手抜き方法
  - 主成分 ($0$ ではない) は $1$ にしてもしなくてもよい (簡約でなくてよい)
  - 主成分の上側の成分はゼロにしなくてよい (簡約でなくてよい)
  - 主列でない列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - $0$ ばかりの行, 列, 定数倍の行, 列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - 上三角行列になった段階で終了
- 係数かける対角成分の積を出力して終了

(慣れた人向け) 還元定理を使ったり，残りの右下ブロックが $2 \times 2, 3 \times 3$ になったら, サラスの公式を使ったりしてもよい．列基本変形を使ってもよい．
還元定理は,「右下ブロックだけ見る」ことに相当

# 復習: 掃き出し法

線形代数☆演習 I(2024)L17 | 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分 $c$ を R2 ① $\times (1/c)$ で 1 にする
(4) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の $a$ を零にする
(10) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックのその列の上側を零にする
(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う
(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

# 簡約階段形や逆行列を求める，と，行列を求める，との違い

| 求めるもの | 簡約階段形, 方程式の解, 逆行列 | 行列式の値 |
|---|---|---|
| 対象<br>つなぐもの<br>許される操作<br>ゴール<br>併用できる操作 | 行列 $\begin{bmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{bmatrix}$, $\left[\begin{array}{cc\|cc}\bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 1\end{array}\right]$<br>→<br>R のみ (*)<br>簡約階段形 | 行列式 $\det \begin{bmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{vmatrix}$<br>=<br>R と C<br>(上) 三角行列<br>還元，展開 (来週)，サラスの公式 $(3 \times 3)$, 行列式が 0 になる十分条件 |

(*) 簡約階段形から進んで標準形 加藤 線形代数 定理 1-2(p.81) を求めるときは C も使います.

線形代数 I を通過した人は, 区別して完璧に実行できるべき手順.
レポート方式の trialL27(?) で対比して確認します.

加藤 線形代数 例題 1, 練習 5(p.123) mobius K4.2.10

# 4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L26(2024-07-10 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-10 Wed 07:57 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 定理 4.1(p.125) 行列式を, 余因子展開で計算できる
- 加藤 線形代数 定理 4.4(p.130) 行列式の値による，正則行列の特徴付けを説明できる
- 加藤 線形代数 定理 4.5(p.131) 逆行列の公式を説明できる

L25-Q1

## Quiz 解答: 行列式

$$1\times\begin{vmatrix}4&0&8&4\\3&1&4&3\\0&1&-2&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{①\times\frac{1}{4}}{=}4\times\begin{vmatrix}1&0&2&1\\3&1&4&3\\0&1&-2&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{①\times(-3)+②}{=}4\times\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&1&-2&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{②\times(-1)+③}{=}4\times\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&0&0&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{④\leftrightarrow③}{=}-4\times\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{vmatrix}=$$

確認:階段行列.

$-60$

簡約階段化で，という指定がない場合，最初の $\frac{1}{4}$ 倍は必須ではありません．

# ここまで来たよ

25 4.3 行列式の計算 | 第 4 章 行列式

26 4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式
- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

# ◆余因子

## 今日の動機

- 第 1 行や第 1 列と限らず, ゼロ成分が多い行や列があったときに還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119) 的な操作をしたい
  - 基本変形 R1 加藤 線形代数 例題 1(p.123) はひとつの方法
- これに該当しないときも, 強引に行列式の次数を reduce したい

**定義 (小行列式と余因子 加藤 線形代数 p.124 加藤 線形代数 定義 4-1(p.125))**

$A$: $n$ 次の正方行列 のとき,
$A$ の $(i,j)$ 小行列式 (minor) $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, $A$ から第 $i$ 行, 第 $j$ 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.
$A$ の $(i,j)$ 余因子 (adjugate) $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

$(i,j)$ 小行列式にかけられる符号=$(i,j)$ 余因子に含まれる符号

$$(-1)^{i+j} = \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

小行列 (submatrix) は, 1 行 1 列とは限らず複数の行と列を取り除いて得られる行列をさす言葉. 部分行列?

例 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} =$ , $\begin{matrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{matrix} =$ .

加藤 線形代数 例 1, 練習 1(p.124), 例 2, 練習 2(p.125) mobius 4.4.10

# ここまで来たよ

25 4.3 行列式の計算 | 第 4 章 行列式

26 4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式
- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

# ◆行列式の余因子展開

展開 (expansion) 1 個の複雑なものを, 単純なもの複数の和として書くこと

## 定理 (余因子展開 加藤 線形代数 定理 4-1(p.125))

$A = [a_{ij}]$ を $n$ 次の正方行列
$\tilde{a}_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ 余因子 とするとき,

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{i\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{\ell j}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明 $i$ 行目に行多重線形性を適用する. 交代性を使って, $a_{i\ell}$ を $(1,1)$ に持っていく. この時出る符号は $(-1)^{i-1+\ell-1}$. 還元定理を使う.

加藤 線形代数 例 3, 例題 1(p.127), 練習 4(p.128) mobius 4.4.30 mobius 4.4.50

$(i,j)$ 小行列式にかけられる符号=$(i,j)$ 余因子に含まれる符号 $=$ $\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$

どこかの 1 行, またはどこかの列を選んで展開する. $n$ 項の和になる.
第 3 行についての展開 ( ., • はつめて, $n-1$ 次の行列式を計算)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = +31 \begin{vmatrix} . & 12 & 13 & 14 \\ . & 22 & 23 & 24 \\ \bullet & . & . & . \\ . & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} - 32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 33 \begin{vmatrix} 11 & 12 & . & 14 \\ 21 & 22 & . & 24 \\ . & . & \bullet & . \\ 31 & 32 & . & 44 \end{vmatrix} - 34 \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & . \\ 21 & 22 & 23 & . \\ . & . & . & \bullet \\ 31 & 32 & 43 & . \end{vmatrix}$$

第 2 列についての展開

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} . & \bullet & . & . \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 22 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} - 32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 42 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ . & \bullet & . & . \end{vmatrix}$$

## 証明の実演 $i = 2$ 行目についての余因子展開. 右側切れてます.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ a & b & c & d \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \\
&\overset{\text{多重線形性}}{=} \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 11 & \\ 0 & \\ 31 & \\ 41 & \end{bmatrix} \\
&\overset{\text{交代性}}{=} (-1)^{i-1} \times \left( \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & \\ 11 & 12 & 13 & \\ 31 & 32 & 33 & \\ 41 & 42 & 43 & \end{bmatrix} \right. \\
&\overset{\text{交代性}}{=} (-1)^{i-1} \times \left( (-1)^0 \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^1 \det \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 13 & 14 \\ 32 & 31 & 33 & 34 \\ 42 & 41 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \right. \\
&\overset{\text{還元定理}}{=} (-1)^{i-1} \times \left( (-1)^0 a \det \begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 32 & 33 & 34 \\ 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^1 b \det \begin{bmatrix} 11 & 13 & 14 \\ 31 & 33 & 34 \\ 41 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \right. \\
&\overset{\text{小行列式の定義}}{=} (-1)^{i+1} a m_{i1} + (-1)^{i+2} b m_{i2} + (-1)^{i+3} c m_{i3} + (-1)^{i+3} d m_{i4} \\
&\overset{\text{余因子の定義}}{=} a\tilde{a}_{i1} + b\tilde{a}_{i2} + c\tilde{a}_{i3} + d\tilde{a}_{i4} \\
&= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + a_{i3}\tilde{a}_{i3} + a_{i4}\tilde{a}_{i4}.
\end{aligned}
$$

L26-Q1

## Quiz(行列式の余因子展開)

次の行列式を考える.

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

1. この行列式を, 第 1 行に関して余因子展開しよう.
2. この行列式を, 第 2 列に関して余因子展開しよう.

L26-Q2

## Quiz(行列式の還元定理)

次の行列式を考える.

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 9 & 11 \\ 13 & 37 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

1. この行列式を, $3 \times 3$ 行列式で書き直そう.

# 行列式の余因子展開 (一般形)

## 定理 (余因子展開 (一般形) 加藤 線形代数 定理 4-2(p.128))

$A = [a_{ij}]$ を $n$ 次の正方行列,
$\tilde{a}_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ 余因子とするとき,

- $\forall i,k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j,k \quad \det(A)\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{k\ell}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明 $i = k$ で $\delta_{ik} = 1$ となるケースは上で証明した.
以下, $i \neq k$ のケースを考える.
$A$ で, $k$ 行目に, $i$ 行目を上書きコピーした行列を $B$ とする.
実は 左辺 $= 0 = \det(B)$=右辺.

左辺=0 $= \det(B)$
$i \neq k$ と交代性より $\det(B) =$ 左辺.

$\det(B) =$ 右辺
$\det(B)$ の $k$ 行目に関する余因子展開は $\det(B) = \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell}\tilde{b}_{k\ell}$.
コピーの結果 $b_{k\ell} = a_{i\ell}$,
余因子 $\tilde{b}_{k\ell}$ は, $i \neq k$ より, コピーされた部分をはずしてるので,
$\tilde{b}_{k\ell} = \tilde{a}_{k\ell}$.
よって $\det(B)$ の余因子展開は右辺と一致する.

結論

$$\det(A)\delta_{ik} = \det(B) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$

$$0 = \det(B) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$

$i \neq k$ の場合の証明の実演

$A$ の $i = 4$ 行を $k = 2$ 行にコピーして $B$ を作成.

$B$ を $k = 2$ 行で展開.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$0 = \det(B) = \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$= 41\tilde{a}_{21} + 42\tilde{a}_{22} + 43\tilde{a}_{23} + 44\tilde{a}_{24}$$

$$= a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + a_{i3}\tilde{a}_{k3} + a_{i4}\tilde{a}_{k4}.$$

# ここまで来たよ

25 4.3 行列式の計算 | 第 4 章 行列式

26 4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式
- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

# 余因子行列

$$\forall i,k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}. \ (i \text{ 行目における余因子展開})$$

動機 $\tilde{a}_{k\ell}$ じゃなくて $\tilde{a}_{\ell k}$ だったら行列の積の形になるのに…

**定義 (余因子行列** 加藤 線形代数 p.129 **)**

$A = [a_{ij}]$ を $n$ 次正方行列, その余因子を $\tilde{a}_{ij}$ とする.
$A$ の余因子行列 $\tilde{A} = [b_{ij}]$ を, $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ である $n$ 次正方行列と定義する.

余因子を素直に行列状に並べて，その後で転置したもの.

例

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}.$$

## 定理 (余因子展開 (行列形) 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129))

$A = [a_{ij}]$ を $n$ 次の正方行列,
$\tilde{A}$ を $A$ の余因子行列とするとき,

$$\det(A) \times E = A\tilde{A} = \tilde{A}A$$

証明 加藤 線形代数 定理 4-2(p.128)の和を, 行列の積とみただけ

## 定理 (逆行列の明示公式 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129)の 加藤 線形代数 系 4-1(p.129))

$A$ を $n$ 次の正則行列,
$\tilde{A}$ を $A$ の余因子行列とするとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

計算問題には使わないこと.

例 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^{-1} =$

$B = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix}, B^{-1} =$

正方行列について，正則 $\Leftrightarrow$ 行列式 $\neq 0$

**定理 (正則行列の特徴づけ 加藤 線形代数 定理 4-4(p.130))**

$A$: $n$ 次の正方行列 のとき
次は同値

(a) $A$ は正則
(b) $\operatorname{rank} A = n$「フルランク」
(c) $\det(A) \neq 0$

- 証明済
  - (a)⇔(b) 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)
  - (a)⇒(c) 加藤 線形代数 系 2-2(p.118)
- ここで証明
  - (c)⇒ (a) 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) より，$\det(A) \neq 0$ なら $A^{-1}$ が存在する．

# 数式処理 — Maple

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L27(2024-07-12 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-11 Thu 18:11 JST hig"

今日の目標

- 数式処理を使う方法を説明できる
- 数式処理システム Maple で線形代数の計算ができる. 逆行列や行列式を求められる
- 人工知能の数学の能力の現状を説明できる

## L26-Q1

### Quiz 解答: 行列式の余因子展開

1. $$\begin{vmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^2 21 \begin{vmatrix} 31 & 3 & 5 \\ 37 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^3 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^4 23 \begin{vmatrix} 2 & 31 & 5 \\ 7 & 37 & 11 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + ($$

   第 4 行に関する展開の方が楽.

2. $$\begin{vmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^3 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^4 31 \begin{vmatrix} 21 & 23 & 25 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^5 37 \begin{vmatrix} 21 & 23 & 25 \\ 2 & 3 & 5 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} +$$

## L26-Q2

### Quiz 解答: 行列式の還元定理

例えば第 1 行に関して余因子展開して,

$$21 \det \begin{bmatrix} 31 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 11 \\ 37 & 0 & 17 \end{bmatrix}.$$

還元定理を使ったと言っても同じこと.

# 複数の基本操作を矢印や等号の上に書く場合の注意 I

これは複数の基本操作を 1 個ずつ順にやっていくことの略記.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{①\times(-1)\ +② \\ ②\times(-1)\ +①}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

つまり上の基本操作から順に行う基本変形と理解しないといけない.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{①\times(-1)+②}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{②\times(-1)+①}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

下の基本操作から行うと別の基本変形，別の結果になる．基本変形だから階数は同じ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{②\times(-1)+①}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{①\times(-1)+②}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

# 複数の基本操作を矢印や等号の上に書く場合の注意 II

基本操作を「同時に」行うのは基本変形ではない．例えば階数が変わってしまう．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{①\times(-1)+② \\ ②\times(-1)+①}}{\not\longrightarrow}{}^{??} \begin{bmatrix} 1\times(-1)+1 & 4\times(-1)+2 \\ 1\times(-1)+1 & 2\times(-1)+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

# ここまで来たよ

26 4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式

27 数式処理 — Maple
- 大規模言語モデル (ex. ChatGPT) と数学
- 数式処理システム Maple

# 大規模言語モデル (ex. ChatGPT) と数学

ChatGPT, Claude, Microsoft Copilot, Gemini などは，生成 AI のひとつである大規模言語モデル（に基づくサービス）の例.
`https://chatgpt.com` で次のように入力してみよう.

```
次の行列の逆行列を求めてください

1  2
3  4
```

```
次の行列は簡約階段形ですか？

3  0  2
0  1  0
0  0  2
```

```
123456*789012 # 97408265472?
```

(以下のアドバイスは時とともに変化するだろうが)

- 得意分野：プログラミング，経済学，翻訳
- 苦手分野：法学，数学，心理学

現時点での大規模言語モデルは，数学については「豆知識に詳しく，妙に計算力があるが，どこか抜けてる 2 学年上の先輩（アドバイスはそのまま信じていいときもいけないときもある)」と思ってはどう？

# ここまで来たよ

26 4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式

27 数式処理 — Maple
- 大規模言語モデル (ex. ChatGPT) と数学
- 数式処理システム Maple

# Maple とは

`https://jp.maplesoft.com/products/maple/`
Waterloo University, Canada で開発され Maplesoft 社で開発・販売される数式処理システム.
ライバル Mathematica, sympy.

## 数式処理システム (CAS: Computer Algebra System) とは

- 量を整数変数 (int), 浮動小数点変数 (double) に記憶して扱うのでなく, 数式を文字列として (実はもっとハイテクな方法で) 記憶して処理するシステム. 無限大なども扱える. `"a+b"` と `"b+a"` は文字列として異なるが, 数式処理システムは, 表す数式の意味が同じであることを知っている.
- 大規模言語モデルとの対比で言うと：できることは間違えない，答はいつも同じ，人間が CAS の文法で指示する必要がある，文法が厳密に決まっている.
- その意味ではコンパイラに似てる面がある?

数学研究でハードに使われてる

# 龍大内で Maple を使える PC と場所

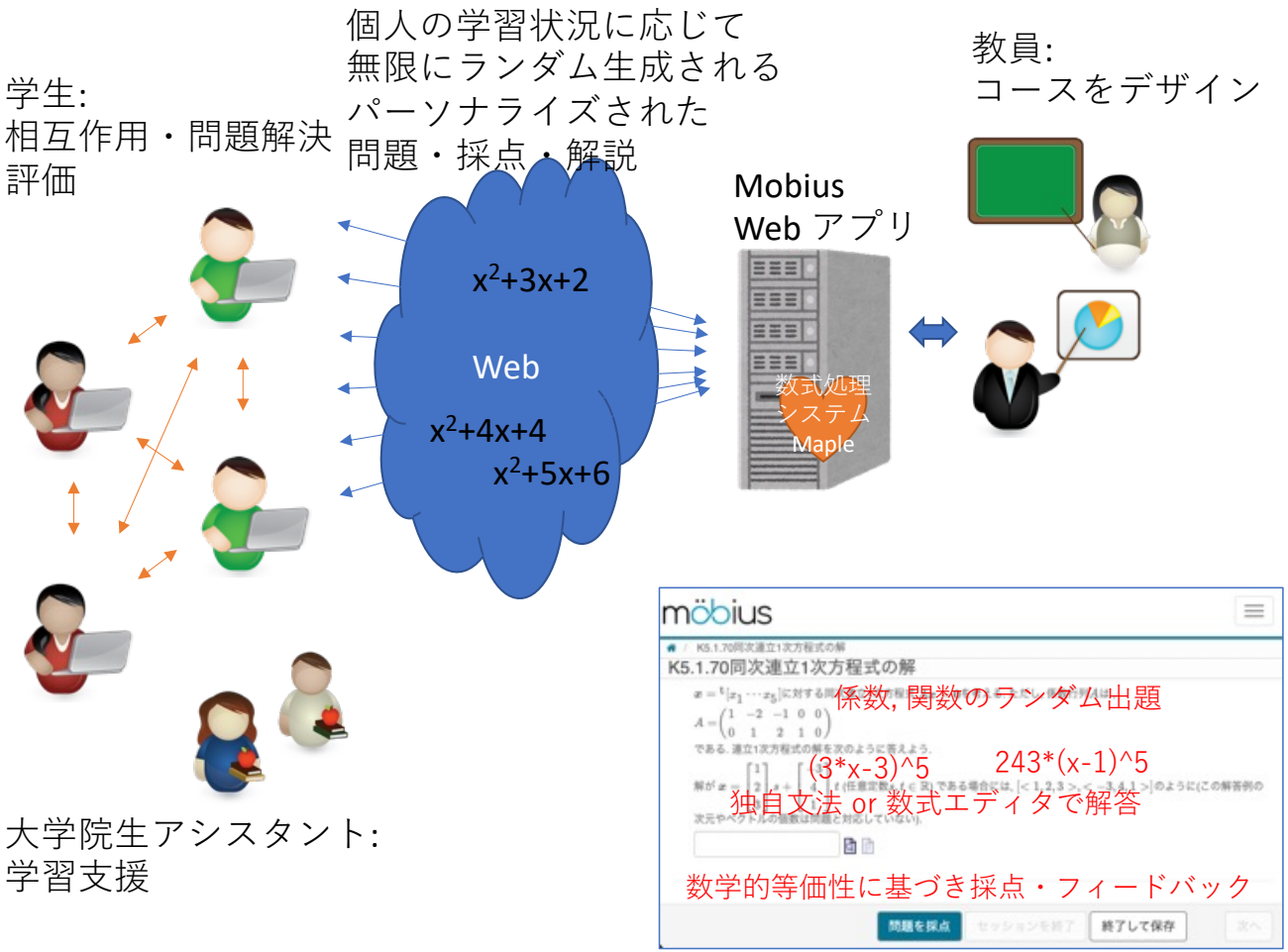
先端理工学部がサイトライセンスに加入しているため「キャンパス内では無料で」使用できます.

- (無料) 瀬田の学内実習室 (3 号館地下, 1 号館 (含む 1-612)) の Windows 10 で
- (無料) ru-wifi に接続した個人 PC
  - 任意の場所で各自でダウンロード, インストールした後, 使用時には ru-wifi に接続する. 使用時に activation (有効化) する.
  - 案内 (全学認証)`https://docs.google.com/document/d/1hqFjKZT5qRjEtg2BpZD7Nx1PTqf0gk6k1IQXfqTvIxw`
- (有料) サイトライセンスに頼らず, 生協で学生版 (Win/Mac) を購入 `https://software.univcoop.or.jp/item/15351`
  - ru-wifi への接続の必要なし
  - 在学中のみ利用可
  - Maple 2024 学生版は税込 13200 円

いずれも学習目的に限定.

# Web アプリケーション, 学習支援システムとは

Mobius は, 数式処理システム Maple をバックエンドとして, Web アプリケーション として構築された学習支援システム



# 実習課題 teamL27 の要約

Moodle の teamL27 の指示にしたがってください．動画を再生しながら，play, pause を繰り返して進むことを推奨．

1. mobius trialL27 の自分の問題の行列を取得する．
2. 配布した Maple ワークシートのサンプルを編集して，行列 A,B に代入して，最終結果の逆行列と行列式を計算してメモしておく．trialL27 の計算結果チェックに利用する．
   - 行基本変形計算機も，成分を入力することにより，計算に利用できる
3. 自分が編集した上のような編集した Maple ワークシート (ファイル名自由) を, Moodle の teamL27 にアップロードして提出する．

# Maple ワークシートのまとめ

- Enter 計算実行
- Shift+Enter 計算実行せず改行

左端の二重線　ブロック区切り
　T ボタン　テキストブロックを作る
　> ボタン　コードブロックを作る
　左端の >　プロンプト この右にコードを入力する



; 行の最後 (or 次の行との区切り) 省略可 (C でいう;)
: 非表示行末
:= 変数への代入 (C でいう=)
= 条件の等式 (C でいう==)
# ここから行末までコメント (C でいう//, /* */)

- 挿入 > Maple Input で, Mobius のテキスト入力相当 (お奨め) になる
- 挿入 > 2D Math で, Mobius の数式エディタ相当になる.
- 環境設定から, どちらをデフォルトにするか選べる (初期は 2D Math)

# Maple の文法

Mobius の解答入力と共通点多い
線形代数ライブラリの導入
行列, 列ベクトル, スカラーの変数代入

```
1 with(LinearAlgebra);
2 A:=<<1|2>,<3|4>>;
3 B:=<<5,6>|<7,8>>;
4 v:=<5,6>;
5 c:=-5;
```

$A + B$

$AB$

$A^3\boldsymbol{v}$

$c\boldsymbol{v}$

$A^{-1}$

$\det A$

$A \to$ 行簡約階段形

```
1 A + B;
2 A . B; # .は行列の積. 表示は「・」
3 A^3 . v; # .は行列とベクトルの積.
4 c * v;
5 MatrixInverse(A);
6 Determinant(A);
7 ReducedRowEchelonForm(A);
```

# 参考:Maple で 微積分

## グラフ描画 plot a graph

```
plot(sin(x)^2);
```

## 微分 differentiate

```
diff(sin(x)^2,x,2);
```

## 原始関数 integral

```
int(sin(x)^2);
```

## 定積分 integral

```
int(sin(x)^2,x=0..Pi/2);
```

## 積分の過程表示

```
with(Student:-Calculus1):
ShowSolution(int(sin(x)^2));
```

# 平面の 1 次変換と行列式の意味

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L28(2024-07-17 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-18 Thu 15:42 JST hig"

今日の目標

- 2 次の行列式で平行四辺形の符号付き面積が求められる
- 2 次の行列式が符号付き面積拡大率であることを説明できる
- 2 次の行列式の性質を図形的に説明できる

# ここまで来たよ

27 数式処理 — Maple

28 平面の 1 次変換と行列式の意味
- 1 次変換と行列
- 行列式の性質の図形的説明

# 1 次変換 加藤 線形代数 p.7 と行列 (L07)

## 定義 (1 次変換, 線形変換)

$\mathbb{R}^2$ の変換で,

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

の形のものを (2 次元の)1 次変換, 線形変換 という.

加藤 線形代数 例題 2(p.9), mobius K0.2.10, teamL07-1

写像 $f : X \to Y$.
$x \in X, y \in Y$.
$U \subset X, V \subset Y$.
のとき,
$f(x) = y$ を言う言葉

- $f$ による $x$ の像は $y$
- $f$ は $x$ を $y$ に写す
- $x$ は $f$ で $y$ に写される
- $x$ は $f$ で $y$ に写る

$f(U) = \{y | \exists x \in U \quad \text{s.t. } f(x) = y\} = V$ を言う言葉

- $f$ による $U$ の像は $V$
- $f$ は $U$ を $V$ に写す
- $U$ は $f$ で $V$ に写される
- $U$ は $f$ で $V$ に写る

L28-Q1

## Quiz(1 次変換の像と逆像)

行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換を考える.

1. $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の，$f$ による像を求めよう.
2. $f$ による像が $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ となるような $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ を求めよう.

# 平面内の直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183 (L04)

## $\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に平行な直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ $\quad (t \in \mathbb{R}$ はパラメタ$)$

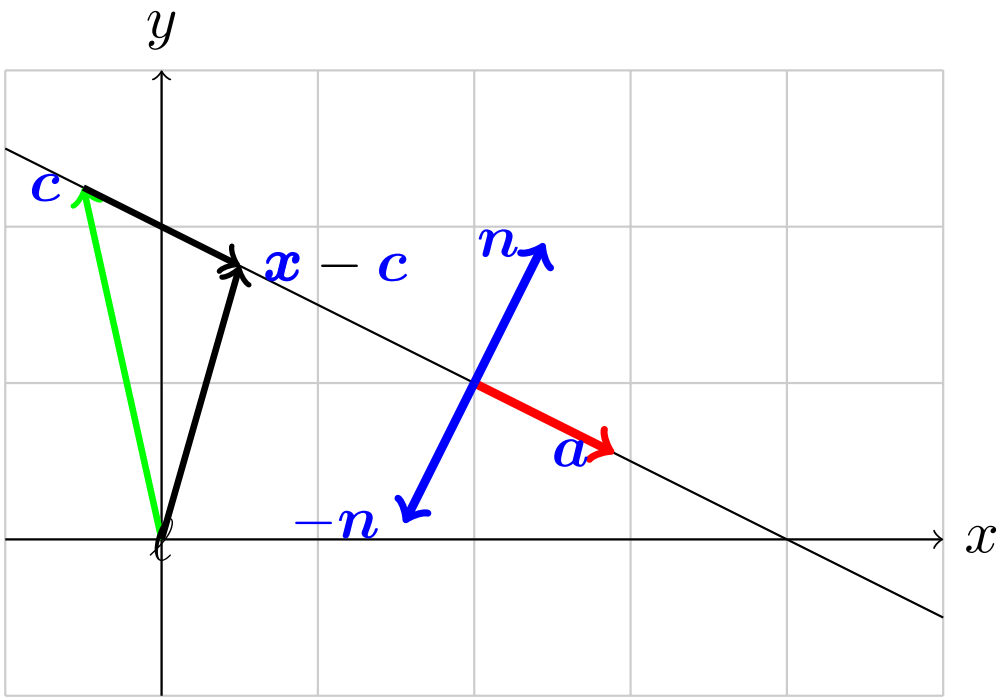
$\boldsymbol{a}$ を直線の接 (線) ベクトルという.

理由

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ として成分で書くと,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$




GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

平面内の直線のパラメタ表示

https://www.geogebra.org/m/skj88vSN

## パラメタ表示された直線の像

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ $(t \in \mathbb{R})$ とパラメタ表示される直線の, 行列 $A$ で表される 1 次変換 $f$ による像は? ($\boldsymbol{a}$ 接ベクトル，$\boldsymbol{c}$ 直線上の点)

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上のパラメタ表示で書ける.
移動後の点 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. $A$ が正則行列なら, 左から $A^{-1}$ をかけて $A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$.
これをパラメタ表示に代入して, $A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$.
両辺に左から $A$ をかけて, $\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$.

## 命題 (直線の 1 次変換による像のパラメタ表示)

直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ の, 行列 $A$ の表す 1 次変換による像のパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, これは直線.
$A$ が正則のとき, **1 次変換で直線は直線に写る**
接ベクトル $\boldsymbol{a}$ は $A\boldsymbol{a}$ に写る.
「通る点」$\boldsymbol{c}$ は $A\boldsymbol{c}$ に写る.

L28-Q2

## Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

パラメタ表示

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

をもつ $\mathbb{R}^2$ の直線 $\ell$ と，行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 $f$ を考える.

1. $f$ による $\ell$ の像のパラメタ表示を求めよう.
2. $f$ で $\ell$ に写る点全体の集合を求めよう.

# 正方形・平行四辺形の像

$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\begin{aligned} S =& \left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \middle| 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ =& \left\{ \boldsymbol{e}_1 s + \boldsymbol{e}_2 t \middle| 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

は，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を 4 頂点とする正方形.

## 正方形の像

正則行列 $A$ で表される 1 次変換 $f$ による，正方形 $S$ の像は？

$$\begin{aligned} f(S) =& \{A(\boldsymbol{e}_1 s + \boldsymbol{e}_2 t) | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{A\boldsymbol{e}_1\ s + A\boldsymbol{e}_2\ t | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

これは，$\boldsymbol{0}, A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, A\boldsymbol{e}_1 + A\boldsymbol{e}_2$ を 4 頂点とする平行四辺形 ($A\boldsymbol{e}_1$ と $A\boldsymbol{e}_2$ が張る平行四辺形)
実は，平行四辺形の像も平行四辺形

> 実は $A$ が正則行列であるなら $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2$ は平行にならない（正方形はつぶれない）．$A$ が正則でないなら正方形は直線や 1 点につぶれる

# ここまで来たよ

27 数式処理 — Maple

28 平面の 1 次変換と行列式の意味
- 1 次変換と行列
- 行列式の性質の図形的説明

# 2 次の行列式と平行四辺形の面積

加藤 線形代数 なし 2 次正方行列 $A$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

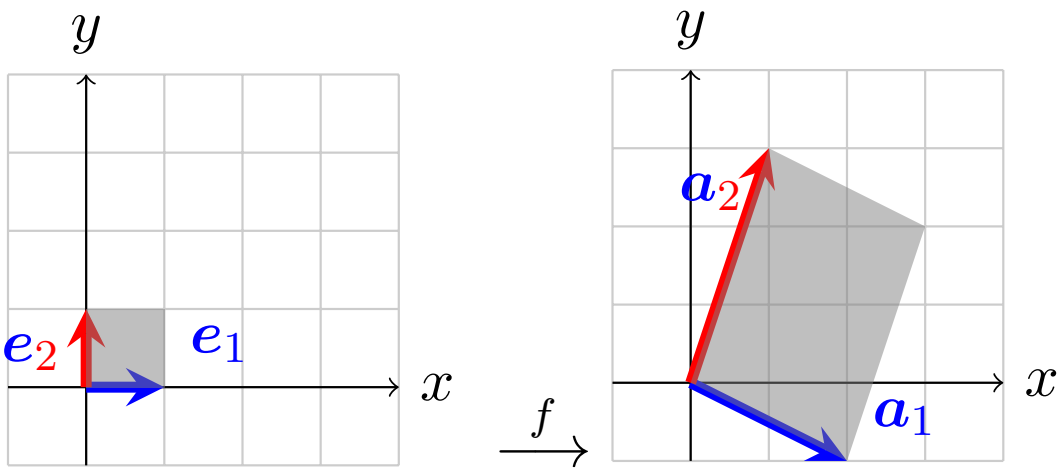
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は, $\boldsymbol{x}$ を $A\boldsymbol{x}$ に写す.

例 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に写る.

$A$ が正則なとき，左図の正方形は, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形に写る.



$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は?

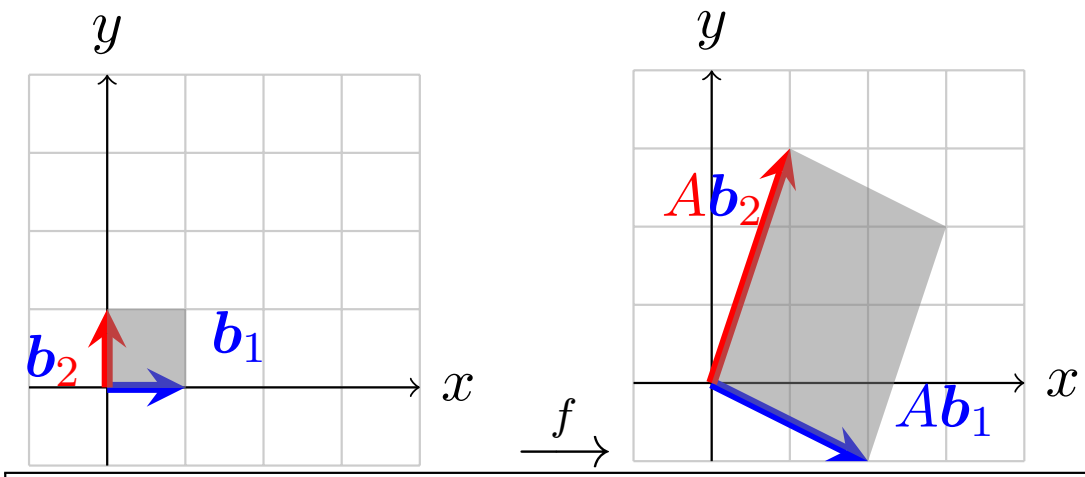
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sin\theta &= \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2|\boldsymbol{a}_2|^2(1-\cos^2\theta)} \\ &= \sqrt{(a_{11}^2+a_{21}^2)(a_{12}^2+a_{22}^2)-(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})^2} \\ &= |a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}| = |\det A| = 7.\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^2$ で，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は，$\det(A) = \det[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]$.

上の例は，正方形（面積 $\det[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2] = 1$）が，1 次変換 $f$ によって 面積 $|\det(A)|$ 倍に拡大された，とも解釈できる.

# 面積拡大率

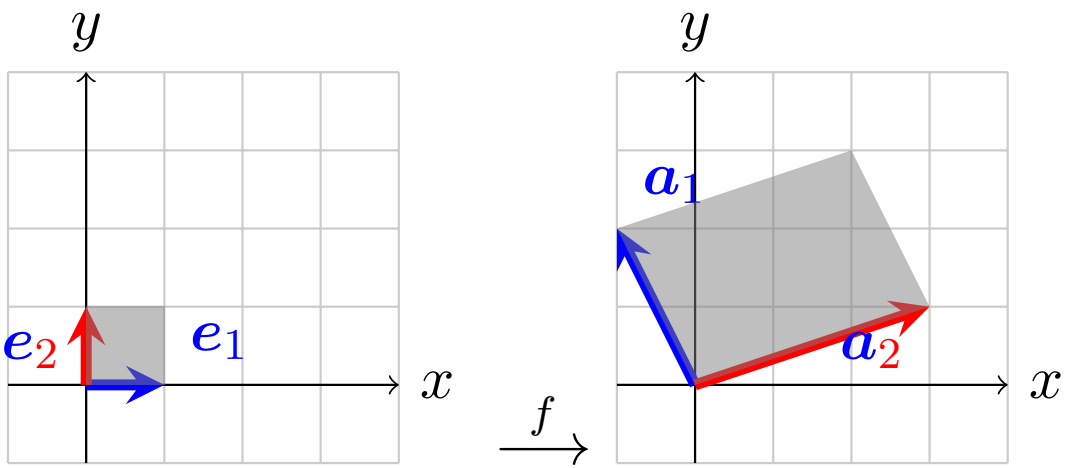
$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$. 正方形の面積は $\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = 4.$
$A\boldsymbol{b}1, A\boldsymbol{b}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は
$\det \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 A\boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \det(AB) = \det A \det B.$
正方形と比べて $\det A$ 倍.




$\det A$ は，平行四辺形が写されたときの面積拡大率 mobius L28

# 平行四辺形が裏返しになるとき

例: $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.




$f$ の拡大率は $\det A = -7$.
平行四辺形が裏返しに写っているとき ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の時計回りの順番が逆になっているとき), 拡大率 $\det A < 0$.
符号付き面積が $-7$ ということもある.

行交代性 ${}^t\boldsymbol{a}_1 \leftrightarrow {}^t\boldsymbol{a}_2$

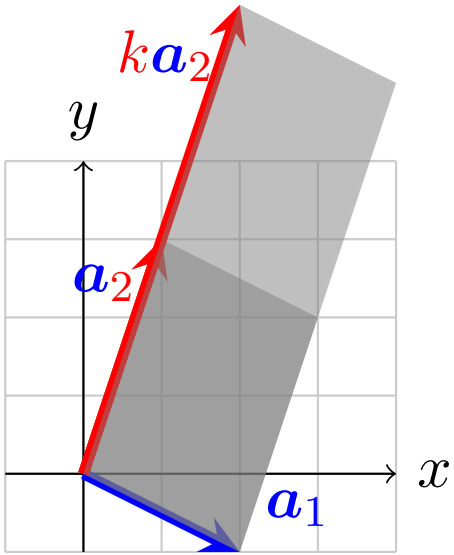
$$\det \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ {}^t\boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix}$$

# 行列式の性質の図形的説明 加藤 線形代数 なし

## 列多重線形性 $k\boldsymbol{a}_2$

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & k\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}2 & 1\cdot k\\ -1 & 3\cdot k\end{bmatrix}\\ =&k\times\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\\ =&k\times 7\end{aligned}$$

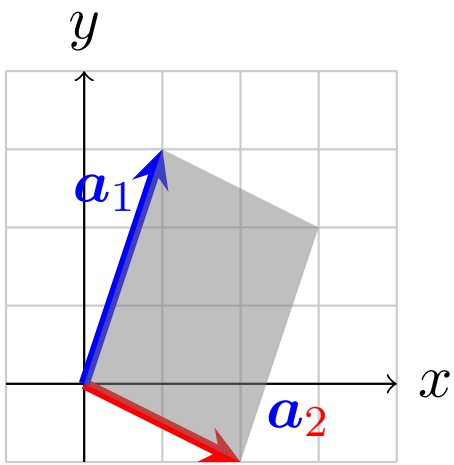



$k=2$

## 列交代性 $\boldsymbol{a}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{a}_2$

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\\ =&(-1)\times\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\\ =&-7\end{aligned}$$



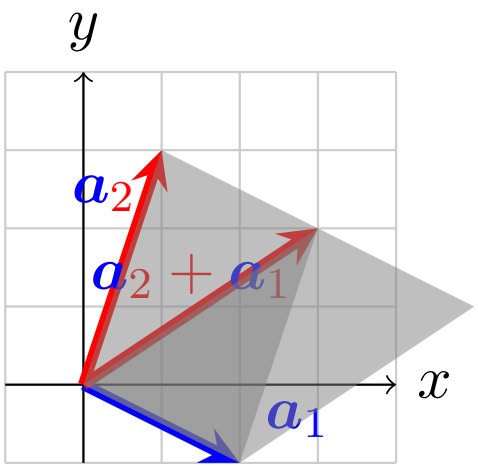
## 列基本操作 C2 $k\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ で不変 行多重線形性

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & k\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}$$

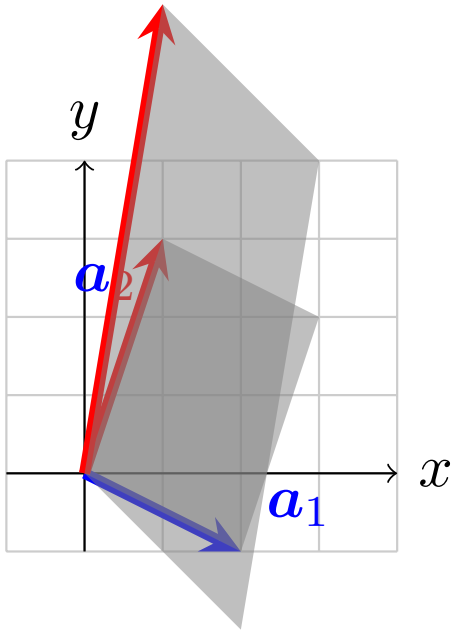
$$\det\begin{bmatrix}{}^t\boldsymbol{a}_1\\ k\,{}^t\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}=k\det\begin{bmatrix}{}^t\boldsymbol{a}_1\\ {}^t\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}2 & 2+1\\ -1 & -1+3\end{bmatrix}$$
$$=7$$

$$\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1\cdot k & 3\cdot k\end{bmatrix}$$
$$=k\times\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$
$$=k\times 7$$




$k=1$




$k=2$

# 積の行列式

$$\det(A_1A_2) = \det(A_1)\det(A_2)$$

$A_1, A_2$ の表す 1 次変換をそれぞれ $f_1, f_2$ とする.
$\det(A_1A_2)$ : 積 $A_1A_2$ の表す合成変換 $f_1 \circ f_2$ で写したときの面積拡大率
$\det(A_1)\det(A_2)$ : $f_2$ で写したときの面積拡大率, かける, さらに, $f_1$ で写したときの面積拡大率.
それらは同じはず

# 逆行列の行列式

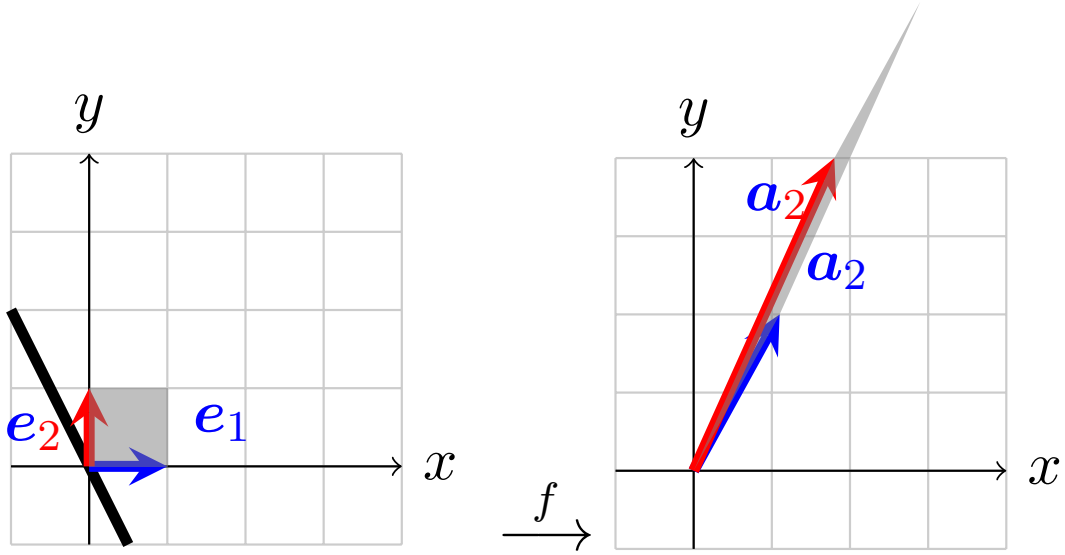
$A$ が正則のとき，

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}}$$

$A^{-1}$ の表す逆変換 $f^{-1}$ の面積拡大率は，
$A$ の表す 1 次変換 $f$ の面積拡大率の逆数
になるはず

# 写すと平行四辺形がつぶれるとき

$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が定数倍の関係にあるとき．
$\det\left[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\right] = \det\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{smallmatrix}\right] = 0.$




面積拡大率=0.
このとき，逆変換は存在しない．
一般に，$A$ が正則でないとき，$f$ の面積拡大率=0 であり，逆変換は存在しない．
つぶれるっていうのは，複数の点が同じ点に写されることだから．

L28-Q3

## Quiz(1 次変換と行列式)

行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換を考える.
4 頂点 $\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ で定まる $\mathbb{R}^2$ 上の平行四辺形 $P$ を考える.

1. $f$ による直線 $x = 2$ の像を求めよう.
2. $f$ により直線 $x = 2$ に写される点の集合を求めよう.
3. 平行四辺形 $P$ の面積を求めよう.
4. $f$ による平行四辺形 $P$ の像は裏返しになるか？
5. $f$ による平行四辺形 $P$ の像の面積を求めよう.
6. $f$ により平行四辺形 $P$ に写される集合の面積を求めよう.

# 1 次変換の階数と像と逆像

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L29(2024-07-19 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-19 Fri 07:23 JST hig"

今日の目標

- 非正則な行列で表される 1 次変換の像と逆像が求められる.

L28-Q1

## Quiz 解答:1 次変換の像と逆像

1. $f(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$
2. $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ すなわち $A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ について解けばよい.
   $A$ は正則なので，両辺の左から $A^{-1}$ をかけて，
   $\boldsymbol{b} = A^{-1}\boldsymbol{a} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$.

これは，$\boldsymbol{b} = f^{-1}(\boldsymbol{a})$ で，逆変換 $f^{-1}$ が逆行列 $A^{-1}$ で表されることを使ったと思うこともできる.

L28-Q2

## Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

1. $\boldsymbol{x} = A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + A \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} (t \in \mathbb{R})$.
2. $A$ は正則なので，次でパラメタ表示される直線
   $\boldsymbol{x} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} (t \in \mathbb{R})$.

L28-Q3

## Quiz 解答:1 次変換と行列式

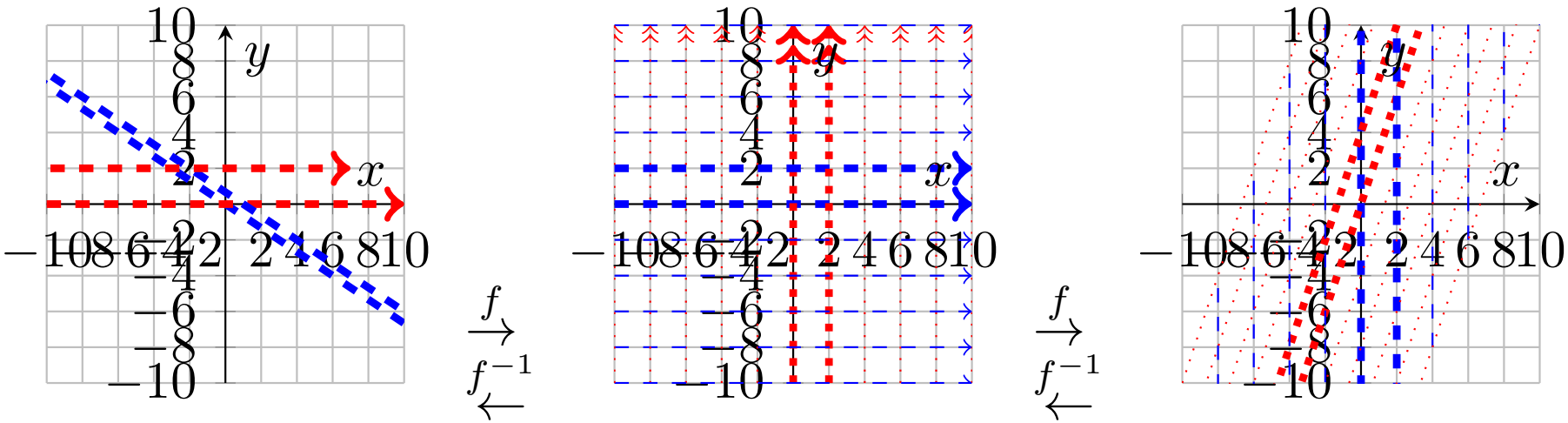
1. $x = 2$ のパラメタ表示は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. $A$ は正則．よって，像は直線で，パラメタ表示は $\boldsymbol{x} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.
2. $A$ は正則．よって，集合は直線で，パラメタ表示は $\boldsymbol{x} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.
3. $\det[\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2] = 5$.
4. $\det A = 13 > 0$ なので裏返しにならない．
5. $\det[A\boldsymbol{a}_1\ A\boldsymbol{a}_2] = \det(A) \det[\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2] = 65$.
6. $A$ は正則なので，集合は平行四辺形．
   $\det[A^{-1}\boldsymbol{a}_1\ A^{-1}\boldsymbol{a}_2] = \det(A^{-1}) \det[\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2] = \frac{5}{13}$.

# 2 次正則行列の表す $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換

$A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ の表す $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 $f$.
基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{e}_1 &= \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \\
A\boldsymbol{e}_2 &= \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right], \\
f(\boldsymbol{x}) = A(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) &= \left[\begin{smallmatrix} y \\ 2x+3y \end{smallmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

$f$ は平面全体を平面全体に写す.




$f$ の「符号付き」面積拡大率 $\det A = -2$.
$\det A < 0$ なので，$f$ は裏返しに写す．
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めよ．
$\Leftrightarrow$ 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け．
この $A$ は正則なので，任意の $\boldsymbol{b}$ について解が一意に定まる．
なぜなら，$\operatorname{rank} A = 2 = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$, 解がある．解の自由度 $2 - 2 = 0$.
$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

# 2 次非正則行列の表す $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換

例として $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$ を考える.
$\operatorname{rank} A = 1$, $\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = ?$. 解があるとき，解の自由度 $2 - 1 = 1$.
面積拡大率 $\det(A) = 0$. 逆行列 $A^{-1}$ は存在しない.

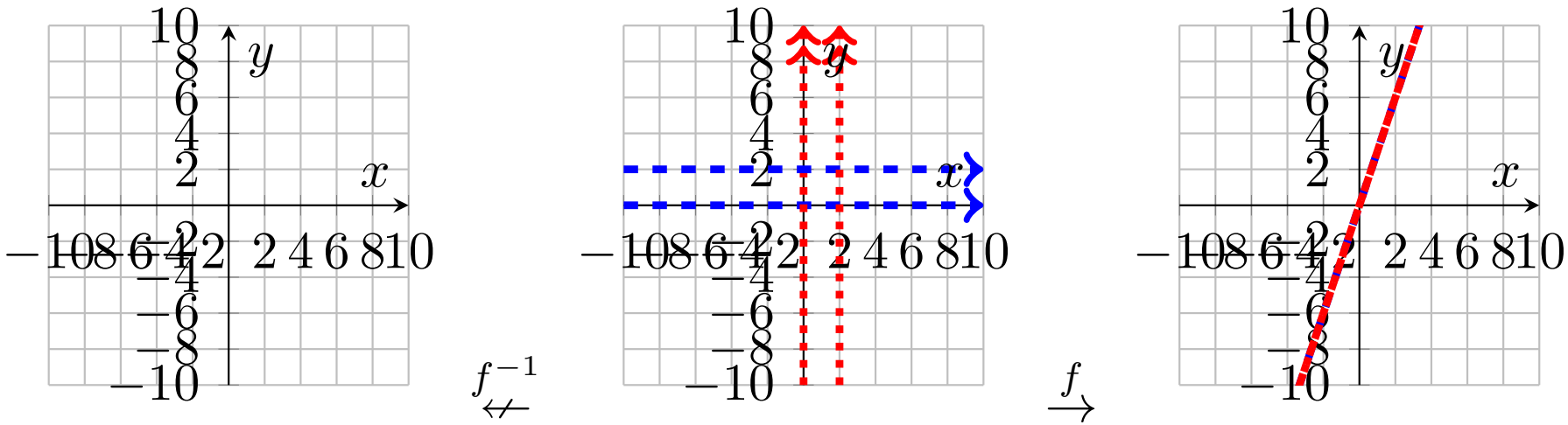
もっと極端なケースとして，$A = O, \operatorname{rank} A = 0$.

$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right]$, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$A\boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right],$$
$$A\boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right],$$
$$f(\boldsymbol{x}) = A(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3(x+2y) \end{bmatrix}$$

すべての $f(\boldsymbol{x})$ は，原点を通る直線 $\ell$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 t$ 上にある！

$f(\mathbb{R}^2) = \{\boldsymbol{y} | \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\} = \{\boldsymbol{y} | \exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_1 t\}$.




図的解釈 $f$ は平面全体を直線 $\ell$ に「圧縮」する

このことから，逆変換 $f^{-1}$ が存在しないことがわかる.

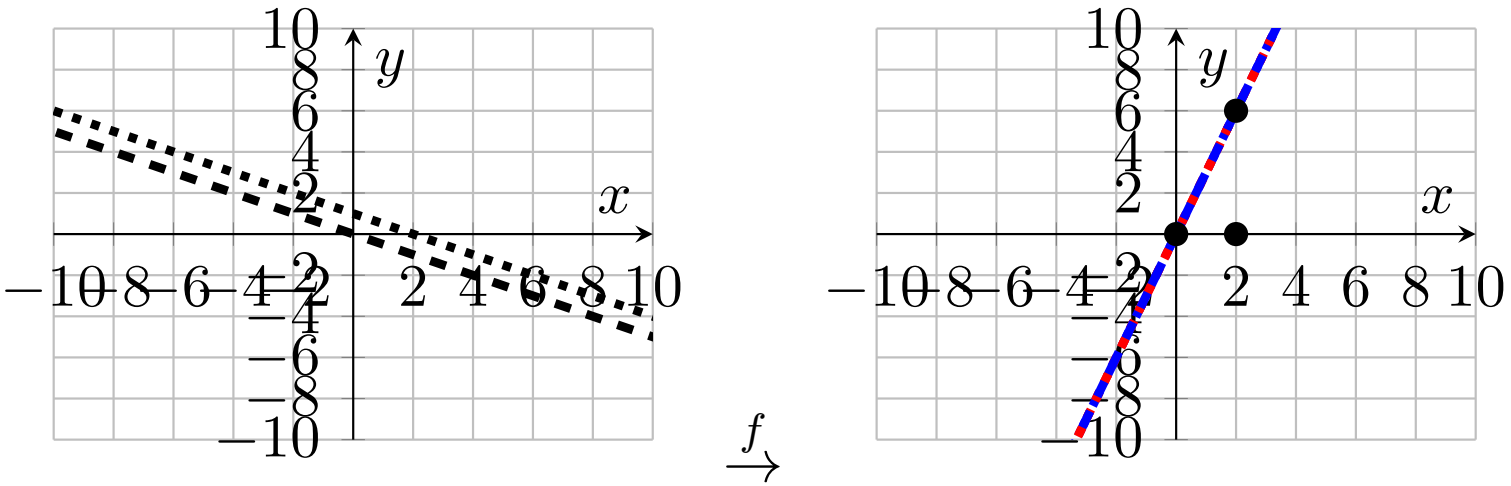
- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 t$ 上にない点 $\boldsymbol{b}$ を $f^{-1}$ で写せと言われたら困るでしょ
- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 t$ 上の点 $\boldsymbol{b}$ は「戻せる」($f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ がある)

同じことだけど，連立 1 次方程式に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解があるとは限らないことがわかる.

- $\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = 2 > \operatorname{rank} A = 1$
- $\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = 1 = \operatorname{rank} A = 1$

# 非正則な $A$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を「解け」

「集合 $\{\boldsymbol{x} | f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$ を決定せよ」という意味
記号の濫用で，この集合を逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{b}\})$ と書くことがある 加藤 線形代数 p.191



## ケース 0 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{smallmatrix}\right] \to \cdots \to \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

同次連立 1 次方程式だから解を持つのは当然 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69)

実際，$\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = 1 = \operatorname{rank} A = 1$ より解あり．解の自由度は $2 - 1 = 1$.

加藤 線形代数 定理 3 － 2(p.65)

解は任意定数 1 個で，$\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] t \ (t \in \mathbb{R})$.

集合$=\{\boldsymbol{x} | \exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] t\}$=1 直線 $m$

図的解釈：

$f$ は $\mathbb{R}^2$ を原点を通る 1 直線に「圧縮」する，

$f$ は直線 $m$ を 1 点 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ に「圧縮」する．

同次連立 1 次方程式が常に自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つのは，「原点 $\boldsymbol{0}$ を通る」1 直線への「圧縮」だから．

ケース 1 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.
$[A|\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
$\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = 1 = \operatorname{rank} A = 1$ より解あり．解の自由度は $2 - 1 = 1$.

加藤 線形代数 定理 3 － 2(p.65)

解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \ (t \in \mathbb{R})$.
集合=$\{\boldsymbol{x} | \exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t\}$=1 直線 $m'$(ケース 1 の直線 $m$ を平行移動したもの).

図的解釈：
$f$ は $\mathbb{R}^2$ を 1 直線に「圧縮」する，
$f$ は直線 $m'$ を 1 点 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ に「圧縮」する，

ケース 2 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
$[A|\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.
$\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = 2 > \operatorname{rank} A = 1$ より解なし. 加藤 線形代数 定理 3 − 2(p.65)
集合$=\emptyset$

図的解釈：直線 $\ell$ に属さない $\boldsymbol{b}$ を選んでも戻せない.

$n - \operatorname{rank} A =$ 解の自由度

「次元」=パラメタ表示するのに必要な任意定数の個数．正確な定義は

線形代数☆演習 II(2024)L

準同型定理 (代数入門)

| $A$ | $n$<br>全体 $\mathbb{R}^n$ の「次元」 | $\operatorname{rank} A$<br>像 $f(\mathbb{R}^n)$ の「次元」 | 解の自由度<br>$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体の集合 |
|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ | 2 | 2 | 0 |
| $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ | 2 | 1 | 1 |
| $O$ | 2 | 0 | 2 |
| | 全体 | 「残る分」 | 「圧縮」される分 |

線形代数☆演習 I(2023)LL19

加藤 線形代数 定理 2-9(p.217)

$n = 3$ なら，非正則行列に，階数 $\operatorname{rank} A = 0, 1, 2$ の 3 パターンがある．

レポート TrialL20 裏では，$n = 3$ で，逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{b}\})$ が，平面になったり直線になったりしてた．

# 定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

用途:Moodle「成績評価方法」参照.

- 2024-08-02 金 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- TrialL01-15 の出題計画をあわせたもの．要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし．ただし，災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2024-08-06).

## 成績評価

- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2024-07-26 金 20:00 までに提出.
- TrialL29 までの採点結果の公表は，2024-07-31 ごろまでに公表する予定.

# 3 次の行列式と体積拡大率

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L30(2024-07-26 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-26 Fri 07:14 JST hig"

今日の目標

- スカラー 3 重積と 3 次の行列式との関係を説明できる
- 3 次の行列式で平行六面体の体積と 1 次変換の体積拡大率を求められる
- 3 次元の簡単な 1 次変換で像と逆像を求められる

# ここまで来たよ

29 1 次変換の階数と像と逆像

30 3 次の行列式と体積拡大率
- 3 次元の 1 次変換
- 3 次の行列式と体積, 体積拡大率
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

# 非/正則な行列で表される 1 次変換

1 次変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を表す $n$ 次正方行列 $A$.

- $n = 2$
  - $A$ 正則
    - ★ 面積拡大率 $\det(A) \neq 0$. 平行四辺形を平行四辺形に写す．$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ に写す.
  - $A$ 非正則
    - ★ 面積拡大率 $\det(A) = 0$. 平行四辺形は「つぶれる」．$\mathbb{R}^2$ は 1 点または 1 直線に写る．$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ の解は…
- $n = 3$
  - $A$ 正則
    - ★ 体積拡大率 $\det(A) \neq 0$. 平行六面体を平行六面体に写す．$\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ に写す.
  - $A$ 非正則
    - ★ 体積拡大率 $\det(A) = 0$. 平行四辺形は「つぶれる」．$\mathbb{R}^3$ は 1 点または 1 直線または 1 平面に写る．$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ の解は…
- $n$ 一般

# 簡単な非正則行列で表される 3 次元の 1 次変換の像と逆像

L30-Q1

## Quiz(3 次元の 1 次変換)

$\mathbb{R}^3$ の 1 次変換 $f$ は，行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, で表される

1. 像 $f(\mathbb{R}^3)$ を求めよう．
2. $\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_1$ となる $\boldsymbol{x}$ 全体の集合 (逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{b}_1\})$ ) を求めよう．
3. $\boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_2$ となる $\boldsymbol{x}$ 全体の集合 (逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{b}_2\})$ ) を求めよう．

一般の $A$ では，像の方はこんなに簡単にはわからない．

例題 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ による $\mathbb{R}^3$ の像は $\{\begin{bmatrix} 3s+t+u \\ 2s+t+2u \\ s+t+3u \end{bmatrix} | s, t, u \in \mathbb{R}\}$.

これは，$\mathbb{R}^3$ ではなく，実は 1 平面．このことは実は $\operatorname{rank} A$ からわかる．

待て線形代数 II 線形独立性基底

# L19 再掲:3 元連立 1 次方程式の解の集合（空間内の）

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (空間内の点) で, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解があるとき ($\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}$).
$\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$. 線形代数☆演習 I(2024)L06 teamL06 TrialL20 裏

$A$ の階数は 3, 解の自由度 0, 解は一意に定まる, 解全体の集合は 1 点,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 \\ x_2 = & 3 \\ x_3 = & 11 \end{array} \rightsquigarrow 1 \text{ 点} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$A$ の階数は 2, 解の自由度 1, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 直線. 加藤 線形代数 p.183

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 - 7c \\ x_2 = & 3 - 9c \\ x_3 = & c \end{array} \rightsquigarrow 1 \text{ 直線} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$A$ の階数は 1, 解の自由度 2, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 平面. 加藤 線形代数 p.184

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 - 5c - 3d \\ x_2 = & c \\ x_3 = & d \end{array} \rightsquigarrow \text{平面} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

$A$ の階数は 0, 解の自由度 3, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は空間全体.

$$\tilde{A} = O$$

# ここまで来たよ

29 1 次変換の階数と像と逆像

30 3 次の行列式と体積拡大率
- 3 次元の 1 次変換
- 3 次の行列式と体積, 体積拡大率
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

# 復習

## 外積

線形代数☆演習 I(2024)L02

加藤 線形代数 p.265-266

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

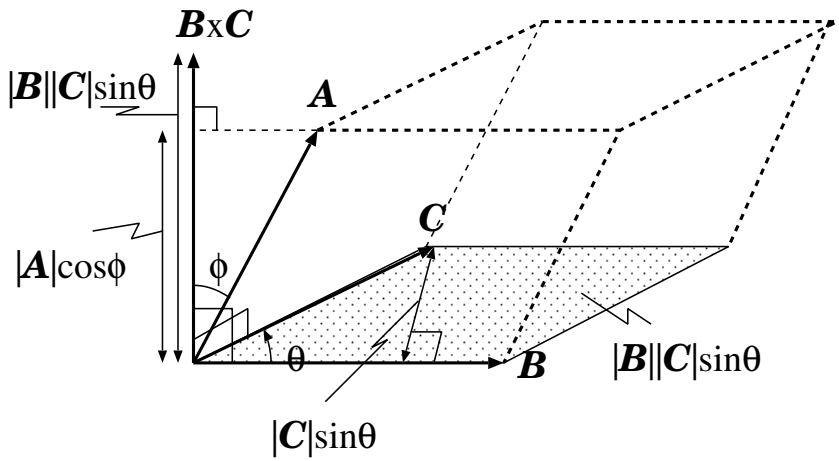
筆算

$$\begin{array}{lll}\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1\\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2\\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3\\ & a_1 & b_1\\ & a_2 & b_2\end{array}$$

## スカラー 3 重積

線形代数☆演習 I(2022)L03

外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトル.
ということは, 内積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ はスカラー (1 個の実数) になる.
図形的に考えると, 絶対値 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする
平行六面体の体積.
右の図は $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}$ を描いている.



# 平行六面体の体積とスカラー 3 重積と行列式の図形的意味

加藤 線形代数 なし

3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を並べた 3 次正方行列の行列式は, スカラー 3 重積, すなわち, 平行六面体の符号付き体積に等しい

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det[\boldsymbol{abc}]$$

実は, $n$ 次正方行列の行列式 $\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ は
$\mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を辺とする $n$ 次元の '平行 $2n$ 面体' の符号付き体積.

行列式は行列の「大きさ」のようなもの

# 復習: サラスの公式

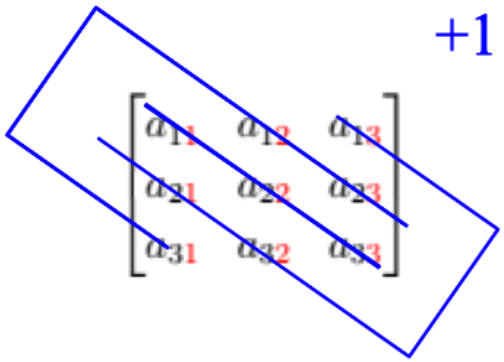
線形代数☆演習 I(2024)L23

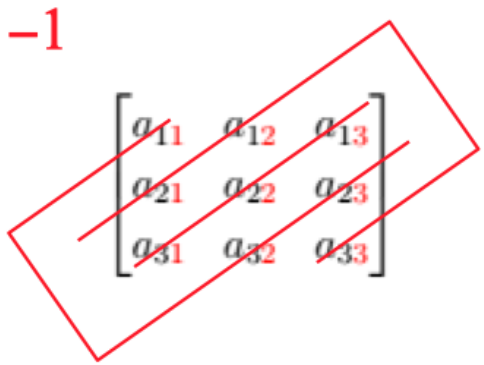
例 $n = 3$ 加藤 線形代数 練習 2(p.109), 章末問題 3(2)(p.133) $3! = 6$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

サラスの公式

加藤 線形代数 図 2(p.108)

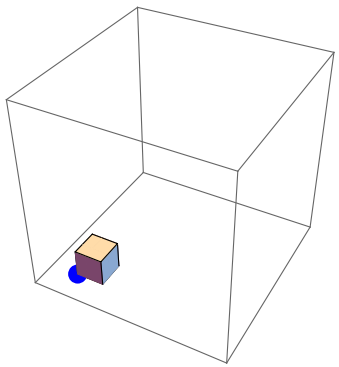
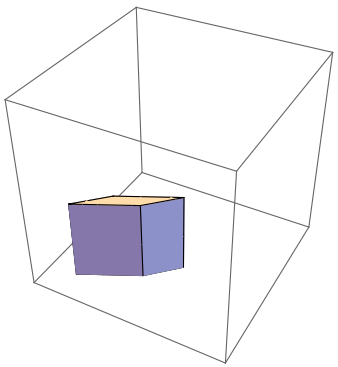


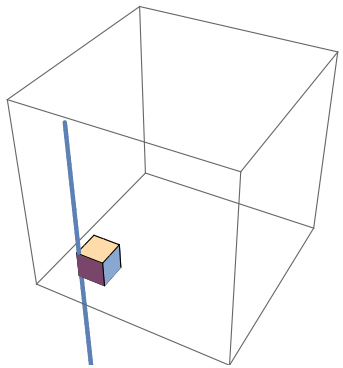
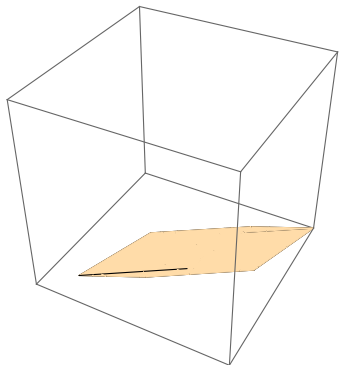
# 3 次の行列式は体積拡大率と思える

$A = [\boldsymbol{abc}]$ の表す $\mathbb{R}^3$ の 1 次変換 $f$ により,
$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{a}$ に, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{b}$ に, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{c}$ に写る.
$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を 3 辺とする立方体は, 1 次変換 $f$ により, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体, またはそれをつぶした平面, 直線, 点に写る.
行列式 $\det A$ は 1 次変換 $f$ の拡大率 (裏返しなら負).

$A = \begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$
$\det A = 9$

$A = \begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\3&2&0\end{bmatrix}$
$\det A = 0$ (平面につぶれる場合)

L30-Q2

## Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

を 3 辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ の表す 1 次変換 $f$ で写した.

$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の作る平行六面体，$f(\boldsymbol{b}_1), f(\boldsymbol{b}_2), f(\boldsymbol{b}_3)$ の作る平行六面体の体積を求めよう.

mobius L30

# ここまで来たよ

29 1 次変換の階数と像と逆像

30 3 次の行列式と体積拡大率
- 3 次元の 1 次変換
- 3 次の行列式と体積, 体積拡大率
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

L30-Q3

## Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

L30-Q4

## Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

$\mathbb{R}^3$ の原点 $\mathbf{0}$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ に平行な平面がある．
ベクトル $\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，平面に関して，一方の側を指している．

1. ベクトル $\boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ は，平面に平行か，$\boldsymbol{c}_1$ と同じ側を指すか，もう一方の側を指すか．
2. ベクトル $\boldsymbol{c}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，平面に平行か，$\boldsymbol{c}_1$ と同じ側を指すか，もう一方の側を指すか．
3. ベクトル $\boldsymbol{c}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ は，平面に平行か，$\boldsymbol{c}_1$ と同じ側を指すか，もう一方の側を指すか．

mobius L30

# 定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

用途:Moodle「成績評価方法」参照.

- 2024-08-02 金 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- TrialL01-15 の出題計画をあわせたもの．要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし．ただし，災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2024-08-06).

## 成績評価

- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2024-07-26 金 20:00 までに提出.
- TrialL29 までの採点結果の公表は，2024-07-31 ごろまでに公表する予定.

# 連絡

- trialL30-1 Mobius 問題 (Mobius L30 で練習の後に)Mobius の Trial で．L30 授業後，期限 2024-08-02 金 20:00
- trialL30-2 Moodle 作文 L30 授業後，期限 2023-08-02 水 20:00
- アンケート
- 2024-08-02 金 1 任意参加小テスト
- 2024-08-02 金 20:00 までの すべての Mobius 課題の取組状況を科目の成績に算入します
- 全学授業アンケート
- 教科書は (少なくとも) 卒業まで売らないで
- 2024 年度後期数理情報基礎演習，2025 年度前期 確率統計 I でまたお会いしましょう（たぶん）

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

# 線形代数☆演習 I L31(2024-07-26 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-26 Fri 08:11 JST hig"

## 今日の目標



## L30-Q1

### Quiz 解答:3 次元の 1 次変換

1. 平面 $z = 0$.
2. 直線 $x - 5 = y - 7 = 0$. パラメタ表示では $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d \ (d \in \mathbb{R})$.
3. $\operatorname{rank} A = 2, \operatorname{rank} [A|\boldsymbol{b}_2] = 3$ より，空集合 $\emptyset$.

## L30-Q2

### Quiz 解答: 体積拡大率

写す前 $\det[\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3] = 6$.
写した後 $\det A \times \det[\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 = 660$.

## L30-Q3

### Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積

右手の中指の理想的な (親指人差し指と直交する) 向きは，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$.
右手だとする．このとき，上で求めた向きと，問題文の実際の右手中指の向きのなす角は $\frac{\pi}{2}$ 未満であるはず．

しかし，内積 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} < 0$ なので，矛盾．よって左手．

L30-Q4

## Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積

$\det[\boldsymbol{abc}_1] = 3 > 0.$

1. $\det[\boldsymbol{abc}_2] = 4 > 0.$ 同じ側．
2. $\det[\boldsymbol{abc}_3] = -5 < 0.$ もう一方の側．
3. $\det[\boldsymbol{abc}_4] = 0.$ 平行．

平面の法線ベクトル $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ となす角で考えることもできる．