

ベクトルの内積

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L01(2024-04-10 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-09 Tue 17:36 JST hig"

今日の目標

- 授業の到達目標/合格条件を説明できる
- Mobius で学習できる
- 2,3次元ベクトルの内積が計算できて利用できる



ここまで来たよ

- はじめに
 - この授業どんなのり?

- ① ベクトルの内積
 - ベクトルの表示と演算の復習
 - Mobius で問題演習
 - ベクトルの内積

線形代数とは?

到達目標 (アバウト)

- シラバスより
 - ▶ 行列の基本的な計算ができる。
 - ▶ ベクトルや直線などの図形の移動や拡大縮小が行列で表現できる。
 - ▶ 連立1次方程式を行列で表現し解くことができる。
- 教科書の前半の問題が何も見ないで楽勝で解ける。
- 教科書解読ベースで大学の数学の学び方ができる。

線形代数とは?

- ベクトルの続き. 2,3次元でなく n 次元. 行列 (例: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$) も。
- 理系の学科はだいたい1年でやる。
- 線形代数と確率は人工知能, 機械学習の大前提。

数理のカリキュラムの中での線形代数

必修. 後続 線形代数及び演習 II. 数学, 現象, DS, 情報科学ぜんぶで必要.

科目ののり

- 週 2 回水 1 金 1.
- ノート PC 持参. 問題を解くための手書きノート用意.
- 毎朝 9:15–9:25? の小テスト 'Trial' をクリアしていく感じで.
- 次の情報基礎 (木 45) 以降, 連絡は Teams で. チームコード dn4dwu5
- 次回から <https://hig3.net> → LearnMoodle
<https://learn.hig3.net> を使います **(2022 と違います)**
- 毎回出席を前提に進めます. 欠席の事前事後連絡不要. やむを得ない理由で欠席してピーナッツ的に成績的に考慮されたい場合は LearnMoodle から欠席届 (2 週後まで).

相談できるところ

- オフィスアワー樋口 前期火 4 木昼, 1-507 or Teams chat a00010
- Math ラウンジ (1 号館 5 階 1-536,538), だいたい昼休みは大学院生常駐. 数理 TM-Math ラウンジ ch on Teams.

科目の成績ののり

(シラバスより)

100 ピーナツ = 小テスト 75 ピーナツ + 平常点 25 ピーナツ

全学ルールで 60 ピーナツ以上が合格です (履修要項参照). 成績は研究室配属や奨学金に影響することがあります.

(詳細)

小テスト 75 ピーナツ = *Trial* = 前半 15 回 $\times 2$ + 後半 15 回 $\times 3$.

平常点 25 ピーナツ = *Mobius* + チーム課題 + その他

当面ののり数回後からテキスト必須 加藤 線形代数 何ページの式 (99). それまで配布資料で. <https://hig3.net> からダウンロードできます.



ここまで来たよ

- はじめに
 - この授業どんなのり?
- ① ベクトルの内積
 - ベクトルの表示と演算の復習
 - Mobius で問題演習
 - ベクトルの内積

ベクトルの表示

ベクトルを $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ のように書く. **細字 a でなく太字 \mathbf{a} で. 手書きなら 2 重線で. 成分は縦に並べて (横は別の意味がある). 3, 4, ... 次元ベクトルも同じ.**

始点 を O , **終点** を P とする矢印を, ベクトル \overrightarrow{OP} という.

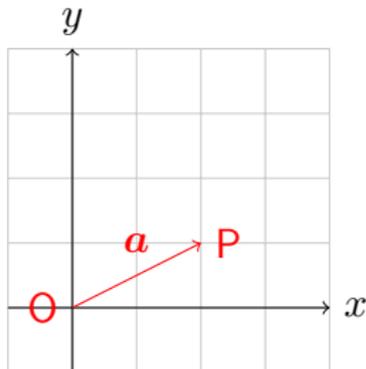
平行移動して重なるベクトルは同じ.

例えば $R(2, 5)$, $S(4, 6)$, なら,

$$\overrightarrow{RS} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2 が x 成分, 1 が y 成分.

教科書では角括弧 bracket $[]$. Web 教材は $()$. 翻訳して.



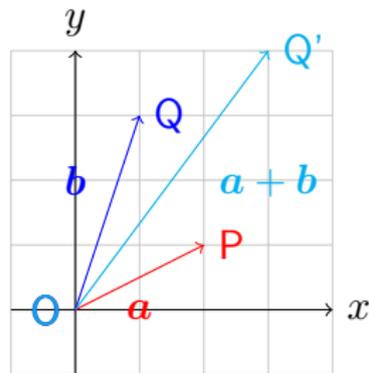
ベクトルの和

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

のとき、ベクトルの和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ は

OP, OQ を 2 辺とする平行四辺形
 を作って、もう 1 個の頂点を Q' と
 すると、 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OQ'}$



$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3, 4, 5, ... 次元ベクトルでも成分ご
 とに加える.

ベクトルの定数倍

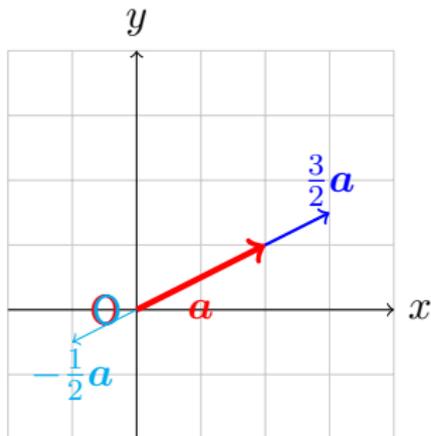
$\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 実数 $k = 3$ に対して, ベクトルの定数倍 $k\mathbf{a}$ は
 長さが \mathbf{a} の長さの $|k|$ 倍のベクトルで,

$k > 0$ なら \mathbf{a} と同じ向き, $k < 0$ なら \mathbf{a} と逆向き (反対向き),

$k = 0$ ならゼロベクトル $k\mathbf{a} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$k\mathbf{a} = k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot k \\ 1 \cdot k \end{bmatrix}.$$

3, 4, 5, ... 次元ベクトルでも成分ごとに k 倍する.



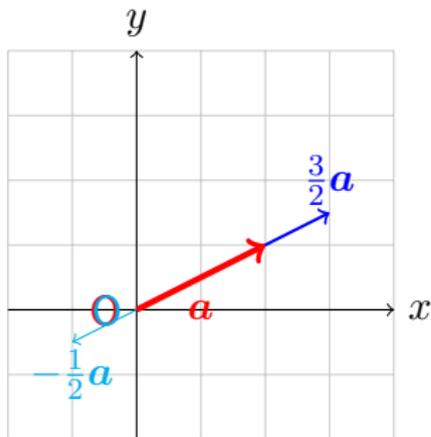
ベクトルの平行

定義 (ベクトルの平行)

零ベクトルでない n 次元ベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} が**平行**であるとは、
ある実数 k が存在して

$k\mathbf{a} = \mathbf{b}$ とかけることをいう。

\mathbf{a} , \mathbf{b} は, $k > 0$ なら**同じ向き**, $k < 0$ なら**逆(の)向き**という。



ここまで来たよ

- はじめに
 - この授業どんなのり?
- ① ベクトルの内積
 - ベクトルの表示と演算の復習
 - **Mobius** で問題演習
 - ベクトルの内積

Mobius で問題演習

<https://mobius.st.ryukoku.ac.jp> または 龍谷 数学学習サポート で検索

Mobius にログイン. 初回はパスワードリセットが必要. 全学統合認証とは別のパスワードを設定.

フォローアップ課題 (4/19 まで) をやりたくなるけど, ぐっところえて線形代数.

数式入力方法

	数式	Mobius(Maple)
ベクトル	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$	<2,-3>
分数	$\frac{355}{133}$	355/133
平方根	$\sqrt{3}$	sqrt(3)
積	$2\sqrt{3}$	2*sqrt(3)

mobius L00 で入力練習, mobius L01 でベクトルの練習

ここまで来たよ

- はじめに
 - この授業どんなのり?
- ① ベクトルの内積
 - ベクトルの表示と演算の復習
 - Mobius で問題演習
 - ベクトルの内積

ベクトルの内積

加藤 線形代数 §7

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

\mathbf{a} の長さを $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2}$, \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を θ とするとき,

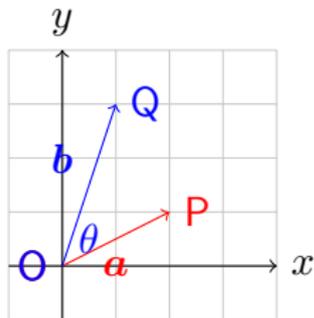
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

と定義する.

$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ と定義する.

$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ をベクトルの絶対値, 長さ という.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 1 + 1 \times 3$ のように定義する.



内積はスカラー積ともいう.

加藤 線形代数 §7.1 では,
内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を (\mathbf{a}, \mathbf{b}) ,
絶対値 $|\mathbf{a}|$ をノルム $\|\mathbf{a}\|$,
という名前/記号で表している.

L01-Q1

Quiz(ベクトルの内積)

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ とする.

- ① 内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ を求めよう.
- ② 絶対値 $|\mathbf{b}|$ を求めよう.
- ③ 内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を求めよう.
- ④ 内積 $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$ を求めよう.

単位ベクトル

定義 (単位ベクトル)

ベクトル \mathbf{a} が $|\mathbf{a}| = 1$ であるとき, \mathbf{a} は単位ベクトルであるという.

命題

ベクトル $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ に対して, \mathbf{a} に平行な単位ベクトルは $\pm \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ である.
特に, 同じ向き of 単位ベクトルが $+\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$, 逆向きの単位ベクトルが $-\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ である.

証明 …

直観的説明 …

ベクトルの直交

\mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角 θ が $\pi/2$ であるとき、
または、 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ または、 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ のとき、
 \mathbf{a} と \mathbf{b} は直交するという。

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ のとき、 \mathbf{a} と \mathbf{b} は直交する
という。

次回

同じ教室. PC 持参.

Trial. 出題計画は…

Mobius で練習しておいてね (最高点が記録). 今回は期限なし.