

ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L02(2024-04-12 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-12 Fri 06:45 JST hig"

今日の目標

- スカラー射影と正射影ベクトルが計算できる
- スカラー射影と正射影ベクトルを応用できる
- LearnMoodle で学習できる



L01-Q1

Quiz 解答: ベクトルの内積

- ① $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 5.$
- ② $|\mathbf{b}| = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^{1/2} = 1000^{1/2} = 10\sqrt{10}.$
- ③ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 30 + (-2) \cdot 10 = 10.$
- ④ $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 5 + 10 = 20.$

ここまで来たよ

① ベクトルの内積

② ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

- 射影: スカラー射影と正射影ベクトル

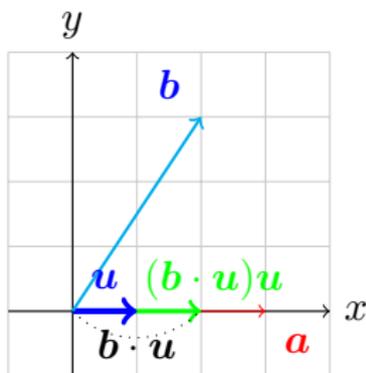
ベクトル b のベクトル a への正射影ベクトル

ベクトル a, b のなす角を θ , a と同じ向きの単位ベクトル $u_a = \frac{1}{|a|}a$.

定義 (スカラー射影と正射影ベクトル)

ベクトル b の a へのスカラー射影とは実数 $b \cdot u_a = |b| \times 1 \times \cos \theta$. (b の, a 向き成分ともいう).

ベクトル b の a への正射影ベクトル (正射影) とは $(b \cdot u_a)u_a = (|b| \times 1 \times \cos \theta)u_a$.

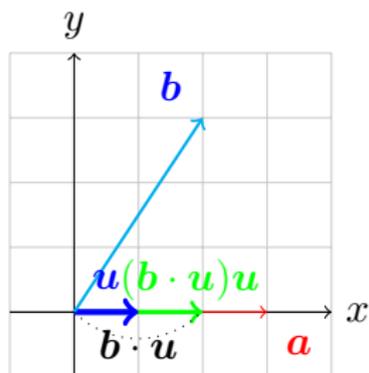


命題 (射影の性質)

- 正射影ベクトルの絶対値はスカラー射影の絶対値である。
なぜなら $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_a = \dots$
- \mathbf{b} の \mathbf{a} への正射影ベクトルは、零ベクトルであるか、 \mathbf{a} と平行である (向きは内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ の符号による)。
- \mathbf{b} の \mathbf{a} への正射影ベクトルとベクトル \mathbf{b} の差は、ベクトル \mathbf{a} と直交する。
なぜなら $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_a - \mathbf{b} = \dots$

原点を通り \mathbf{a} に平行な直線に、 \mathbf{b} の終点から下ろした垂線の足を考える

- スカラー射影の絶対値を求めなさい \Leftrightarrow 原点から垂線の足までの距離を求めなさい
- 正射影ベクトルを求めなさい \Leftrightarrow 原点を始点、垂線の足を終点とするベクトルを求めなさい



b の, a へのスカラー射影の意味: 敵ゴールポストの向き a に進みたい人にとって, キック b はどのくらい意味 (符号付きの長さ) があるか?

b の, a への正射影ベクトルの意味:
敵ゴールポストの向き a に進みたい人にとって, キック b をゴールポスト向きでいうとどういうベクトルか?

L02-Q1

Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする.

- ① \mathbf{a} と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
- ② \mathbf{b} と逆向きの単位ベクトルを求めよう.
- ③ \mathbf{b} の, \mathbf{a} へのスカラー射影を求めよう.
- ④ \mathbf{b} の, \mathbf{a} への正射影ベクトルを求めよう.
- ⑤ \mathbf{a} の, \mathbf{b} へのスカラー射影を求めよう.
- ⑥ \mathbf{a} の, \mathbf{b} への正射影ベクトルを求めよう.

L02-Q2

Quiz(ベクトルの射影)

北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向きであるような座標系を取る.

- ① 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
- ② 北西向き (北と西の中間 45° の向き) の単位ベクトルを成分表示で書こう.
- ③ 北西向きに 3km 進んだ. このベクトルを \mathbf{b} とする. これは, 北向き \mathbf{a} にはどれだけ進んだことになる?
- ④ 北向きに 2km , 次に東向きに 1km 進んだ. このベクトルを \mathbf{b}' とする. これは, 北西向き \mathbf{a}' にはどれだけ進んだことになる?

Hint. \mathbf{b} の, \mathbf{a} へのスカラー射影.

L02-Q3

Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が y 軸の正の向き, 東が x 軸の正の向きであるような座標系を取る.

あるサッカーコートのサイドラインは, 自陣の端 $F = \begin{bmatrix} -30 \\ -45 \end{bmatrix}$, 敵陣の端 $E = \begin{bmatrix} 30 \\ 45 \end{bmatrix}$ である (単位は m)

以下いずれも電卓使用可だけど小数じゃなく厳密な答で.

- ① ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{FE}$ の長さを求めよう. 単位をつけて答えよう.
- ② ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{FE}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
- ③ 味方のフォワードが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ まで運んだ. このフォワードは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか, 単位をつけて答えよう (近づけたなら正, 遠ざけたなら負).
- ④ 味方のミッドフィールダーが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} -30 \\ 10 \end{bmatrix}$ までドリブルした. このミッドフィールダーは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか, 単位をつけて答えよう (近づけたなら正, 遠ざけたなら負).

Hint …の…へのスカラー射影

Moodle

<https://hig3.net>



→ LearnMoodle <https://learn.hig3.net>

→ 'Google account Ryukoku' に `y{2024}....@mail.ryukoku.ac.jp` で
ログイン

→ 線形代数☆演習 (2024)

Moodle は Manaba の仲間. LMS=Learning Management System. 世界的には高等教育では Moodle のシェアが大きい.