ベクトルの外積

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L03(2024-04-17 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-17 Wed 06:25 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.265 3 次元のベクトルの外積が計算できて利用できる

L02-Q1
Quiz 解答: ベクトルの射影と向き成分

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは
$\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルは $-\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{-1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \frac{-1}{\sqrt{6^2+2^2}}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
3. $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
4. $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
5. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
6. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{b}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L02-Q2
Quiz 解答: ベクトルの射影

1. $\boldsymbol{u}_{\mathrm{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.
2. $\boldsymbol{u}_{\mathrm{NW}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. 北向きの単位ベクトルは $\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
   $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = 3\boldsymbol{u}_{\mathrm{NW}} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. $\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{NW}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{NW}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

命題 (射影の性質)

- 正射影ベクトルの絶対値はスカラー射影の絶対値である．
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \cdots$
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルは, 零ベクトルであるか, $\boldsymbol{a}$ と平行である (向きは内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の符号による).
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルとベクトル $\boldsymbol{b}$ の差は, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交する.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} - \boldsymbol{b} \qquad = \cdots$

原点を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線に, $\boldsymbol{b}$ の終点から下ろした垂線の足を考える

- スカラー射影の絶対値を求めなさい $\Leftrightarrow$ 原点から垂線の足までの距離を求めなさい
- 正射影ベクトルを求めなさい $\Leftrightarrow$ 原点を始点，垂線の足を終点とするベクトルを求めなさい

ここまで来たよ

2 ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

3 ベクトルの外積
- 3 次元の座標系と基本ベクトル
- 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)
- スカラー 3 重積

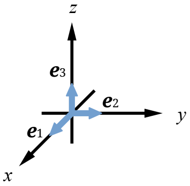
3 次元の座標系と基本ベクトル

定義 (基本ベクトル)

3 次元の

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_\mathrm{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形の 3 つのベクトルを基本ベクトルという. 加藤 線形代数 p.25



右手系

x 軸は手前向け

x: 親指, y: 人差し指, z: 中指

命題 (基本ベクトルの性質)

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

定義 (クロネッカーのデルタ記号)

加藤 線形代数 p.25

$$\delta_{ij} \overset{\text{定義}}{=} \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

‘同じなら 1, 違ったら 0’

ここまで来たよ

2 ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

3 ベクトルの外積
- 3 次元の座標系と基本ベクトル
- 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)
- スカラー 3 重積

3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

加藤 線形代数 §7. 研究

定義 (外積)

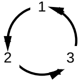
2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のことを外積という.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}$$

この記号 ‘×’ は新しい記号. (実数のふつうの ‘かける’ とたまたま同じ文字).

1 成分覚えれば, あとは, $1, 2, 3$ つまり x, y, z が循環的 (cyclic) に入れ替わってることに注意.

$1 \to 2 \to 3 \to 1.$



別の書き方

$$
\begin{aligned}
&(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\
\overset{!}{=}&(a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

例 $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3$.

外積の成分表示の覚え方

$$
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\
\boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\
\boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \\
 & a_1 & b_1 \\
 & a_2 & b_2
\end{array}
$$

L03-Q1

Quiz(3 次元ベクトルの外積)

1. 外積 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ を求めよう.
2. 外積 $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ を求めよう.
3. 外積 $\begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ を求めよう.

mobius　L03

計算方法

ふつうの数であるかのように展開してよい.

$$\text{超注意 } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \text{よって} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c},$$
$$(c\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = c \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

$$\text{計算例} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

外積の図形的な意味

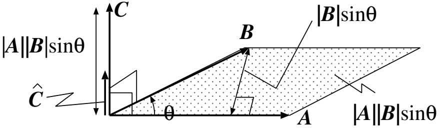
$$\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\ (\sin\theta)\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{c}}}$$

ただし, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{c}} = \hat{\boldsymbol{C}}$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルで, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{c}} \rangle$ が右手系をなす (右手の形 ⟨親指, 人差し指, 中指⟩ $= \langle \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} \rangle$ を π を越えて開かずに得られる) もの.

別の言い方

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$

$\boldsymbol{c}$ の向きは, $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に回る右ねじが進む向き.



大きさは $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のはる平行四辺形の面積).

- 力のモーメント $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.

例

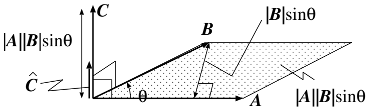
$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = ?$

$\boldsymbol{e}_1 \times (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = ?$

外積ってけっきょく何?

$\boxed{\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ のはった網みたいなもの}}$

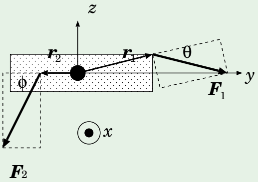
- 2 本の棒 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり 平行四辺形の面積 が $\boxed{|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- 剛体の力学のトルク=力のモーメント $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.



L03-Q2

Quiz(3 次元ベクトルの外積)

原点を中心に回転するやじろべえを考える. $\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を, $\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を加える. 右の図 (ベクトルは正確じゃないです) のように x 軸の正の向きから見たとき, やじろべえは時計回り, 反時計回りどちらに回るか考えよう.



L03-Q3

Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

ここまで来たよ

2 ベクトルの射影：スカラー射影と正射影ベクトル

3 ベクトルの外積
- 3 次元の座標系と基本ベクトル
- 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)
- スカラー 3 重積

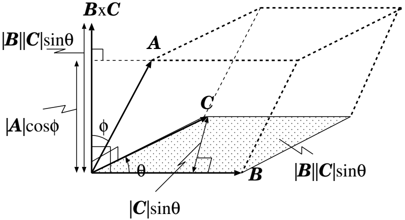
スカラー 3 重積

外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})}$

をスカラー 3 重積という. ($|\boldsymbol{abc}|$ ともかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)
図形的に考えると, 絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする

平行六面体の体積.



L03-Q4

Quiz(ベクトルとスカラーの演算)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトル, k をスカラー (ふつうの 1 個の実数のこと) とする.
次の式 (の計算結果) を, スカラー, 3 次元ベクトル, 間違った式に分類しよう.

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$
3. $(\boldsymbol{a} \cdot k) \times \boldsymbol{b}$
4. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot k\boldsymbol{c}$
5. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$