平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L04(2024-04-19 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-24 Wed 13:15 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.183 直線のパラメタ表示を説明できる
- 加藤 線形代数 p.183 法線ベクトルを用いた直線の方程式が説明できる

L03-Q1

Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot(-5)-4\cdot(-2) \\ -2\cdot(-6)-(-5)\cdot 1 \\ 1\cdot 4+(-6)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$.
2. $-\begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$.
3. $\mathbf{0}$.

L03-Q2

L03-Q3

Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積

右手の中指の理想的な (親指人差し指と直交する) 向きは，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$.

右手だとする．このとき，上で求めた向きと，問題文の実際の右手中指の向きのなす角は $\frac{\pi}{2}$ 未満であるはず．

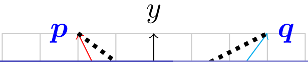
しかし，内積 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} < 0$ なので，矛盾．よって左手．

命題 (射影の性質)

- 正射影ベクトルの絶対値はスカラー射影の絶対値である.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \cdots$
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルは, 零ベクトルであるか, $\boldsymbol{a}$ と平行である (向きは内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の符号による).
- $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルとベクトル $\boldsymbol{b}$ の差は, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と直交する.
  なぜなら $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} - \boldsymbol{b} \quad = \cdots$

原点を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線に, $\boldsymbol{b}$ の終点から下ろした垂線の足を考える

- スカラー射影の絶対値を求めなさい ⇔ 原点から垂線の足までの距離を求めなさい
- 正射影ベクトルを求めなさい ⇔ 原点を始点，垂線の足を終点とするベクトルを求めなさい



ここまで来たよ

3 ベクトルの外積

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 直線のパラメタ表示と方程式

平面内の直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183

$\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に平行な直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ 　　$(t \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

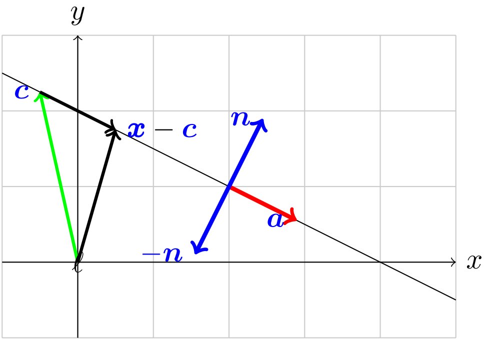
$\boldsymbol{a}$ を直線の接 (線) ベクトルという.

理由

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ として成分で書くと,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$



GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

平面内の直線のパラメタ表示

https://www.geogebra.org/m/skj88vSN

射影による理解

$\boldsymbol{x}$ が直線上にあるための必要十分条件は，
$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}$ の，$\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルが，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}$ のままであること．

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{u}_a)\boldsymbol{u}_a =& (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) \\
\text{スカラー } ((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{u}_a) \text{ を } k\in\mathbb{R} \text{ とおくと} k\boldsymbol{u}_a =& \boldsymbol{x}-\boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{x} =& k\boldsymbol{u}_a+\boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{x} =& k\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} \\
t=\frac{k}{|\boldsymbol{a}|} \text{ とおくと}, \boldsymbol{x} =& \boldsymbol{a}t+\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

パラメタ表示とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ を固定して, t を実数全体を動かしたとき, $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ は直線全体を動く. このとき, $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ を直線のパラメタ (媒介変数) 表示, t をパラメタ (媒介変数) という.
$\mathbb{R}$ 実数全体, $\mathbb{R}^2$ 2 次元ベクトル全体=平面

1 つの直線には複数の媒介変数表示がある.
例: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$ はすべて同じ直線を表す.

L04-Q1

Quiz(直線のパラメタ表示)

ベクトル $\boldsymbol{p} = \left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$ に平行で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \left[\begin{smallmatrix}5\\7\end{smallmatrix}\right]$ を通る直線を考える.
直線のパラメタ表示を何個か作ろう（ベクトルで）.

点が，パラメタ表示された直線上にあるかどうかの判定

点 $\boldsymbol{x}_0$ と，パラメタ表示された直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ を考える．
$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ となる t がひとつでも存在すれば，この t についての方程式に解 t が存在すれば，$\boldsymbol{x}_0$ は直線上にある．

L04-Q2

Quiz(直線のパラメタ表示)

次のパラメタ表示を持つ平面上の直線を考える．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

点 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$ はそれぞれ直線上にあるか，判定しよう．

mobius　L04.1

平面上の直線のベクトル方程式

$\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{n}(\neq \boldsymbol{0})$ と垂直な直線のベクトル方程式 加藤 線形代数 p.183

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0.$$

$\boldsymbol{n}$ を直線の法 (線) ベクトルという.

理由

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{n}$ に垂直である

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ (実数の定数) とおくと,

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} - C = 0 \qquad (C\text{は定数})$$

となる. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ として成分で書くと,

$$ax + by - C = 0.$$

https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P

射影による理解

$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}$ の，$\boldsymbol{n}$ へのスカラー射影が 0 とも見られる．

(ベクトル) 方程式とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | f(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

となるような (条件) 式 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ のこと.

直線には, 同値な複数の方程式の形がある.
例: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} - C = 0$, $\boldsymbol{x} \cdot (2\boldsymbol{n}) - 2C = 0$, $\boldsymbol{x} \cdot (-\boldsymbol{n}) + C = 0$ はすべて同じ直線を表す.

L04-Q3

Quiz(直線のベクトル方程式)

ベクトル $\boldsymbol{p} = \left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$ に垂直で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \left[\begin{smallmatrix}5\\7\end{smallmatrix}\right]$ を通る直線を考える.
直線の方程式を求めよう.

mobius　L04.1

垂直なベクトル

$\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\end{smallmatrix}\right]$ に垂直で同じ長さのベクトルは, $\pm\boldsymbol{n} = \pm\begin{bmatrix}-a_2\\a_1\end{bmatrix}$.

たしかに $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} = 0, |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{n}|$ になってる.

点が, 方程式で表された直線上にあるかどうかの判定

点 $\boldsymbol{x}_0$ と, 方程式 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ を考える.
$f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立すれば $\boldsymbol{x}_0$ は直線上にある.

L04-Q4

Quiz(直線の方程式と点)

次の平面上の直線の方程式を考える．

$$2x + 3y - 19 = 0.$$

点 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ直線上にあるか，判定しよう．

パラメタ表示から機械的に方程式を求める
パラメタ t を消去する.
方程式から機械的にパラメタ表示を求める
いつでもうまくいく方法はない…
平面上の直線の場合はこの方法で.
x 座標を t とおいて y 座標を t で表す. $f(t)$ となったとする.

$$\begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} (t \in \mathbb{R})$$

が直線のパラメタ表示.
意味や図を考える方法
どちらで与えられるにせよ, いったん図を描き, その直線のパラメタ表示や方程式を考える.
直線の場合, 接線ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ から, それに直交する法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ と求める方法 (およびその逆) がある.

L04-Q5

Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

1. 次のようにパラメタ表示される直線の方程式を求めよう.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. 次の方程式で表される直線のパラメタ表示を作ろう.

$$5x - 2y - 10 = 0$$

L04-Q6

Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

1. ベクトル $\boldsymbol{p} = \left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$ に平行で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \left[\begin{smallmatrix}5\\7\end{smallmatrix}\right]$ を通る直線のパラメタ表示と方程式を求めよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{q} = \left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$ に垂直で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \left[\begin{smallmatrix}3\\13\end{smallmatrix}\right]$ を通る直線のパラメタ表示と方程式を求めよう.