スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L05(2024-04-24 Wed)

最終更新: Time-stamp: ”2024-04-24 Wed 13:24 JST hig”

今日の目標

- スカラー 3 重積を計算し，利用できる
- 平面上・空間内の直線のパラメタ表示を説明できる
- 空間内の平面のパラメタ表示，ベクトル方程式を説明できる

L04-Q1

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}\text{はパラメタ})$$

L04-Q2

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる t が存在しないので, 直線上にない.
2. $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 29 \end{bmatrix}$ となる t が存在しないので, 直線上にない.
3. $t = 2$ とすると 、$\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$ となるので, 直線上にある.

L04-Q3
Quiz 解答: 直線のベクトル方程式

方程式は,

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

すなわち,

$$3x + y - 22 = 0$$

L04-Q4
Quiz 解答: 直線の方程式と点

1. 代入すると方程式が満たされないので, 直線上にない.
2. 代入すると方程式が満たされるので, 直線上にある.

L04-Q5
Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

1. 接線ベクトルが $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. これと直交する法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ は法線ベクトル. よってベクトル方程式は

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0.$$

2. 法線ベクトルは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. これと直交する接線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ は接線ベクトル. また, 点 $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ は直線上にあることがわかる. よってパラメタ表示は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

L04-Q6
Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

1. パラメタ表示は
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (t\text{はパラメタ})$$
2. 法線ベクトルのひとつは $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. よって, 直線の方程式は
$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0.$$
すなわち
$$(x-5) - 3(y-7) = 0$$
3. 直線と平行なベクトルのひとつは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. よってパラメタ表示は
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$
方程式は
$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$
すなわち
$$3(x-3) + (y-13) = 0.$$

ここまで来たよ

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 空間内の直線のパラメタ表示
- スカラー 3 重積
- 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

空間内または平面内の直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}$ に平行な直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183

$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

$$\text{すなわち}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \qquad (t \in \mathbb{R}\text{はパラメタ})$$

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

GeoGebra(動的幾何ソフトウェア)

2D `https://www.geogebra.org/m/skj88vSN`

3D `https://www.geogebra.org/m/KYg7AZ7M`

空間 (3 次元) のとき，パラメタ表示は，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$a_1, a_2, a_3 \neq 0$ の場合，t を消去すると，見たことのある方程式になる．

$$\frac{x - c_1}{a_1} = \frac{x - c_2}{a_2} = \frac{x - c_3}{a_3}.$$

$a_i = 0$ の場合は個別に考える必要がある．

x 軸のパラメタ表示とベクトル方程式

x 軸のパラメタ表示とベクトル方程式を求めよう．

空間 (3 次元) のとき，平面上の直線の方程式 $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0$ の形は，実は空間内の平面の方程式であって，**空間内の直線の方程式ではない**（式の個数が違う）

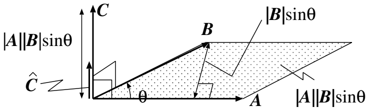
ここまで来たよ

外積の直観的意味

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boxed{\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ のはる平行四辺形の面積と向き}}$

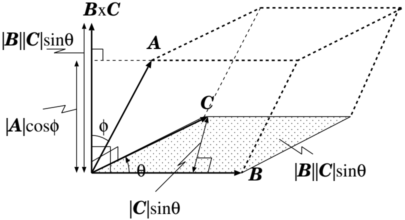
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張った漁業用網の効率を伝えるもの

- 2 本の棒 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり $\boxed{\text{平行四辺形の面積}}$ が $\boxed{|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- フレミングの左手の法則とか, これで簡単に書ける. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.

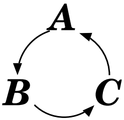


スカラー 3 重積

外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.
$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})}$
をスカラー 3 重積という. ($|\boldsymbol{abc}|$ ともかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)
図形的に考えると, 絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする
$\boxed{\text{平行六面体の体積}}$.



体積だから, 絶対値 $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ は，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の順序を変更しても等しい.
じゃあ絶対値を取る前の符号は等しい?
実は, 順序を循環的に変えたときは $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の符号も同じ.



1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号が逆になる.
右手の指で言うと，**中** $\cdot$ (**親** $\times$ **人**) > 0.
右手系の座標系では $\boldsymbol{e}_z\cdot(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y)>0$. 左手だと逆符号.
符号つき体積

行列式 線形代数☆演習 I(2024)L25?

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-1\times(-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-1\times\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

mobius L05

L05-Q1

Quiz(内積・外積・スカラー 3 重積)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ を考える.

1. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよう. これを利用して, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよう.
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を, 外積で求めよう.
3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を, 図形的に求めよう.
4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を, スカラー 3 重積で求めよう.

L05-Q2

Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

L05-Q3

Quiz(ベクトルとスカラーの演算)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトル, k をスカラー (ふつうの 1 個の実数のこと) とする.
次の式 (の計算結果) を, スカラー, 3 次元ベクトル, 間違った式に分類しよう.

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$
3. $(\boldsymbol{a} \cdot k) \times \boldsymbol{b}$
4. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot k\boldsymbol{c}$
5. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

ここまで来たよ

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 空間内の直線のパラメタ表示
- スカラー 3 重積
- 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

(空間内の) 平面のパラメタ表示

$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.184

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s$$

すなわち$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s + \boldsymbol{c}$　　$(t, s \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行でない.

https://www.geogebra.org/m/YHmGKuJN

L05-Q4

Quiz(平面のパラメタ表示とベクトル方程式)

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ に平行な平面を考える.

1. パラメタ表示を求めよう
2. ベクトル方程式を求めよう
3. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面上にあるか，パラメタ表示から調べよう.
4. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面上にあるか，ベクトル方程式から調べよう.

空間内の平面のベクトル方程式

平面と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \mathbf{0}$) を, 平面の法 (線) ベクトル normal vector という.

$\boldsymbol{c}$ を通り，$\boldsymbol{n}(\neq \mathbf{0})$ に垂直な平面のベクトル方程式 加藤 線形代数 p.184

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0$$

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ とおくと,

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x} = C$$

$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C.$$

2D `https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P`
3D `https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2`

平面に平行な (しかし互いに平行ではない)2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられたとき，ひとつの法ベクトルは外積 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で得られる.
このとき，平面のベクトル方程式は，スカラー 3 重積が 0 という式

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

になっている.
$\boldsymbol{x}$ が平面上にあるとは，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平行六面体がつぶれて面積 0 になり，3 個のベクトルが平面内にあること.

L05-Q5

Quiz(平面の方程式)

1. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ であり，点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう．
2. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり，点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう．

mobius　L06