空間内の平面・直線の共通部分

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L06(2024-04-26 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-04-26 Fri 06:28 JST hig"

今日の目標

- 空間内の平面・直線のパラメタ表示と方程式との間の書き替えができる
- 空間内の平面・直線の共通部分を求められる
- 空間内の平面・直線を描ける

Quiz

3 次元空間における x 軸のパラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad (t \in \mathbb{R})$，方程式 $y = z = 0$.

L05-Q1

Quiz 解答: 内積・外積・スカラー 3 重積

1. $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$. $\theta = \frac{3}{4}\pi$. $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$. $\sqrt{5}\sqrt{10}(1/\sqrt{2}) = 5$.
2. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = 5$.
3. $5 \times 3 = 15$.
4. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 15$.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の順序を循環的に変えたとき, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の符号も絶対値も同じ.
1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号は逆になる.
右手の指で言うと，**中** $\cdot$ (**親** $\times$ **人**) > 0.
右手系の座標系では $\boldsymbol{e}_z \cdot (\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y) > 0$. 左手だと逆符号.
L05-Q2
Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積　右手の中指の理想的な (親指人差し指と直交する) 向きは, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$.
右手だとする．このとき，上で求めた向きと，問題文の実際の右手中指の向きのなす角は $\frac{\pi}{2}$ 未満であるはず.
しかし，内積 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} < 0$ なので，矛盾．よって左手.
L05-Q3
Quiz 解答: ベクトルとスカラーの演算

1. へん
2. スカラー

3. ベクトル
4. スカラー
5. ベクトル

ここまで来たよ

5 スカラー3重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 空間内の平面・直線の共通部分
- 空間内の平面
- 共通部分
- 右手系・左手系

空間内の平面のベクトル方程式

平面と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \mathbf{0}$) を, 平面の法 (線) ベクトル normal vector という.

$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{n}(\neq \mathbf{0})$ に垂直な平面のベクトル方程式 加藤 線形代数 p.184

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}=0$$

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}=C$ とおくと,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=C$$

$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax+by+cz=C.$$

2D `https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P`
3D `https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2`

平面のパラメタ表示，接ベクトルから方程式

平面の接ベクトル (平面に平行なベクトル) で, 互いに平行ではない 2 つ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられたとする.

- たとえば，パラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s + \boldsymbol{c}$ の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がその例

このとき，平面のひとつの法ベクトルは外積 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で得られる.
よって，平面のベクトル方程式は，スカラー 3 重積が 0 という式

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

になっている.
$\boldsymbol{x}$ が平面上にあるとは，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平行六面体がつぶれて体積 0 になり，3 個のベクトルが平面内にあること.

L06-Q1

Quiz(平面の方程式)

1. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ であり，点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう.
2. 単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり，点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ を通る平面の方程式を求めよう.

mobius L06

L06-Q2

Quiz(平面のパラメタ表示とベクトル方程式)

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ に平行な平面を考える．

1. パラメタ表示を求めよう
2. ベクトル方程式を求めよう
3. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面上にあるか，パラメタ表示から調べよう．
4. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面上にあるか，ベクトル方程式から調べよう．

ここまで来たよ

5 スカラー 3 重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 空間内の平面・直線の共通部分

- 空間内の平面
- 共通部分
- 右手系・左手系

パラメタ表示と方程式の関係

部分集合（図形，例えば直線や平面）の
パラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(t, s) \quad (t, s \in \mathbb{R})$
方程式 $f_1(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) = \cdots = 0$
とする．

$$
\begin{aligned}
\text{部分集合 (図形)} &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \text{ある } t, s \in \mathbb{R} \text{ で} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(t, s) \text{とかける}\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | f_1(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) = \cdots = 0\}
\end{aligned}
$$

このとき，$f_1(\boldsymbol{p}(t, s)) = f_2(\boldsymbol{x}(t, s)) = \cdots = 0$ が成立．

2 つの図形の共通部分を求めるには？
部分集合 1$= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |$条件 1$\}$.
部分集合 2$= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |$条件 2$\}$.
部分集合 1 と部分集合 2 の共通部分 $= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |$条件 1かつ条件 2$\}$.

直線と平面の共通部分の求め方 (例 1)

L06-Q3

Quiz(パラメタ表示された直線と，方程式で表された平面の共通部分)

空間内で，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ とパラメタ表示される直線と，方程式 $f(\boldsymbol{x}) = z + 1 = 0$ で表される平面との，共通部分を求めよう．

直線と平面の共通部分の求め方 (例 2)

L06-Q4

Quiz(方程式で表された直線と，パラメタ表示された平面の交点)

空間内で，方程式 $x-18=y-15=0$ で表される直線と，
$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}(t,s)=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}6\\4\\3\end{bmatrix}$ とパラメタ表示される平面との共通部分を求めよう．

ここまで来たよ

5 スカラー3重積・空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 空間内の平面・直線の共通部分
- 空間内の平面
- 共通部分
- 右手系・左手系

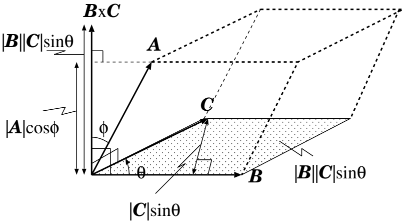
スカラー 3 重積

外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

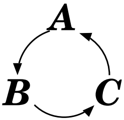
$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})}$

をスカラー 3 重積という. ($|\boldsymbol{abc}|$ ともかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)
図形的に考えると, 絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする

$\boxed{\text{平行六面体の体積}}$.



体積だから, 絶対値 $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ は，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の順序を変更しても等しい.
じゃあ絶対値を取る前の符号は等しい?
実は, 順序を循環的に変えたときは $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の符号も同じ.



1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号が逆になる.
右手の指で言うと，**中** $\cdot$ (**親** $\times$ **人**) > 0.
右手系の座標系では $\boldsymbol{e}_z\cdot(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y)>0$. 左手だと逆符号.
符号つき体積

行列式 線形代数☆演習 I(2024)L25?

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-1\times(-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-1\times\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

mobius L05

L06-Q5

Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.