写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L07(2024-05-01 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-01 Wed 06:57 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.7 2×2 行列と 2×1 行列 (ベクトル) の積が計算できる
- 加藤 線形代数 例題 2,3(pp.9,10) 1 次変換から行列, 行列から 1 次変換を求められる

Quiz

L06-Q1

Quiz 解答: 平面の方程式

1. $\frac{1}{\sqrt{14}}(3x + y - 2z) = C$ とおく. $\boldsymbol{r}_0$ を通ることから, $\sqrt{14}C = 3 \cdot 1$ よって, $3x + y - 2z = 3$.
2. $0x + 0y + 1z = C$ とおく. $\boldsymbol{r}_0$ を通ることから, $C = -4$ よって, $z = -4$.

L06-Q2

Quiz 解答: 平面のパラメタ表示とベクトル方程式

1. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t, s\text{はパラメタ})$$

2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は平面の法線ベクトルのひとつ．よって, 方程式は,
$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$
すなわち
$$x - 13 = 0.$$
3. 略
4. 方程式を満たしているかどうかチェックして, $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ は平面上にある. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ は平面上にない.

L06-Q3

Quiz 解答: パラメタ表示された直線と，方程式で表された平面の共通部分

$f(\boldsymbol{p}(t)) = 0$ を解いて，$t = -4$. よって共通部分は，点
$\boldsymbol{p}(-4) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}(-4) + \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

直線と平面の共通部分の求め方 (例 2)

L06-Q4

Quiz 解答: 方程式で表された直線と，パラメタ表示された平面の交点

$f_1(\boldsymbol{p}(t,s)) = f_2(\boldsymbol{p}(t,s)) = 0$ を解いて，$t = 2, s = 3.$ よって共通部分は，点 $\boldsymbol{p}(2,3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{3} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}.$

ここまで来たよ

◆写像 加藤 線形代数 §0.1

定義 (写像)

2 つの集合 (set) X, Y において，X のどの要素 (element, 元ともいう) にも，Y の要素が 1 つずつ対応しているとき，この対応 (規則) を X から Y への写像 (map, mapping) という． 加藤 線形代数 p.6,p.12,p.191

写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (集合) → 終域 (集合)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 ↦ 像

$f(a) = b$ ともかく．b を「f による a の像 (image)」という

写像の例

X=実数全体または部分集合, Y=実数全体，というケースに限定したとき，写像は（以前から知っている）関数 (function) に一致する．

例 (実数から実数への写像=関数)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^2$　　高校なら関数 $f(x) = x^2$ と書くところ.

写像は, 一般の集合で考えられる.

定義 (集合)

$\mathbb{R}$ =(実数の全体の集合)
$\mathbb{R}^2 = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] | x, y \in \mathbb{R}\}$: 2 次元実数ベクトルの集合=平面 E.

集合={元の形|元の満たす条件}.

例 (直線のパラメタ表示は写像)

平面内の場合 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
(空間内なら $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)
$f : t \mapsto \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$
同様に使う書き方: $f(t) = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{x}(t) = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$

例

空間内の平面のパラメタ表示は$\boxed{}$から$\boxed{}$への写像

$$\boldsymbol{p}(t, s) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} t + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} s + \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$$

例

平面内の直線の方程式の $f(\boldsymbol{x})$ は$\boxed{}$から$\boxed{}$への写像

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 3x + 2y + 3 = 0$$

例

空間内の平面の方程式の $f(\boldsymbol{x})$ は$\boxed{}$から$\boxed{}$への写像

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 3x + 2y + 5z + 3 = 0$$

空間内の直線の方程式は $\boxed{}$から$\boxed{}$への写像 を使って書ける．

◆変換

定義 (変換)

集合 X から X 自身への写像を X の変換 (transformation) という.

写像で，$Y = X$ のケースということ.

例 (実数の変換)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

(実数全体で定義された) 関数は実数の変換

例 (写像で，$\mathbb{R}^2$ の変換であるもの)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f : \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{smallmatrix} x \\ -y \end{smallmatrix}\right]$

例 (変換でない写像)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f : \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto 2x + 3y + 5$

ここまで来たよ

◆1 次変換 加藤 線形代数 p.7

定義 (1 次変換, 線形変換)

$\mathbb{R}^2$ の変換で,

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

の形のものを (2 次元の)1 次変換, 線形変換 (linear transformation) という.

教科書修正 加藤 線形代数 p.7

誤 これらの点の座標の間には以下の関係式が成り立つ. (式) この場合...)

正 これらの点の座標の間に以下の関係式 (式) が成り立つ場合...)

教科書の間違い探し

末尾の奥付の, 版と年月日を確認しよう.
出版社や著者のサイトに正誤表がないか確認しよう
`https://www.chart.co.jp/goods/item/contents/43168.html`

定義 (行列 (1 次変換の記号))

$$f: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = & ax+by \\ y' = & cx+dy \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{x'} \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{x} \\ \boxed{y} \end{bmatrix}$$

はすべて同じことを表す記法.

次のように実数を長方形の表状にならべて [ ] で括ったもの $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を行列 (matrix) という.

行列 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ と行列 (ベクトル) $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ の積は行列 (ベクトル) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ に等しい, と読む.

例題

行列 A と $\boldsymbol{x}$ から像 $A\boldsymbol{x}$

加藤 線形代数 例題 2(p.9), mobius K0.2.10, チーム課題 1

$\boldsymbol{x}$ と像 $A\boldsymbol{x}$ から行列 A

加藤 線形代数 例題 1, 加藤 線形代数 例題 3(p.10), mobius K0.2.10, チーム課題 2

mobuis での行列入力

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ = <x,y>
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ = < <a,c>|<b,d> > (or < <a|b>,<c|d> >)
縦ベクトルを横にならべたイメージ. mobius L00.03

Trial L07 出題計画 mobius K0.2.10

ここまで来たよ

対称変換 加藤 線形代数 例 1(p.7)

例 (対称変換)

- x 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- y 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 直線 $y = x$ に関する対称変換 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- 原点に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

相似変換と恒等変換 加藤 線形代数 例 1(p.8)

例 (相似変換)

- 相似比 k の相似変換 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = kE$
- 恒等変換 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

例 (回転変換)

- 一般角 θ だけ回転した回転変換 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$