

写像の合成・行列の積 | 0章平面と1次変換

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L08(2024-05-08 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-07 Tue 09:09 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §0.1(p.6,8) 対称変換・相似変換の行列を書ける
- 加藤 線形代数 §0.3(p.9) 行列の積を計算できる
- 加藤 線形代数 §0.3(p.11) 写像の合成 と 行列の積 の関係を説明できる



復習: 写像と変換と 1 次変換

写像の記号

$$f: X \rightarrow Y$$

写像名: 定義域 (domain) \rightarrow 終域 (codomain)

$$f: a \mapsto b$$

写像名: 要素, 元 (element) \mapsto 像 (image)

「 $f(a) = b$ 」 「写像 f による a の像は b 」 「写像 f は a を b に写す」

$X = Y$ であるような写像を, 「 X の変換」という.

$X = Y = \mathbb{R}^2$ で, 次の形の変換 f を 「 \mathbb{R}^2 の 1 次変換」という. a, b, c, d : 定数

$$f: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \quad \text{行列による表記} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

対称変換

加藤 線形代数 例 1(p.7)

高校では対称移動と言っていたもの。

例 (対称変換)

次の 1 次変換を表す行列は…

- x 軸に関する対称変換
- y 軸に関する対称変換
- 原点に関する対称変換
- 直線 $y = x$ に関する対称変換

L08-Q1

Quiz(1 次変換を表す行列の求め方)

直線 $y = x$ に関する対称変換を表す行列を求めよう.

◆ 相似変換と恒等変換 加藤 線形代数 例 1(p.8)

例 (相似変換)

次の 1 次変換を表す行列は…

- 恒等変換 **単位行列** $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
 - ▶ 平面の点を動かさない
- 相似比 k の相似変換 $kE = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.
 - ▶ ベクトルを k 倍する

L08-Q2

Quiz(正射影ベクトルを与える 1 次変換を表す行列)

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ への正射影ベクトルを対応させる変換 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は 1 次変換か. 1 次変換なら, f を表す行列を求めよう.

ここまで来たよ

7 写像・変換・1次変換|0章平面と1次変換

8 写像の合成・行列の積|0章平面と1次変換

- ◆1次変換の合成|3. いろいろな1次変換

最初にまとめ

写像・変換の言葉 (一般的)	行列・ベクトルの言葉
\mathbb{R}^2 の点 \boldsymbol{x}	2次元ベクトル \boldsymbol{x}
\mathbb{R}^2 の 1 次変換 f \boldsymbol{x} の像は $f(\boldsymbol{x})$	(2×2) 行列 A 行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$
1 次変換 f, g の合成変換 $g \circ f$ \boldsymbol{x} の像は $g(f(\boldsymbol{x}))$	行列の積 BA $BA\boldsymbol{x}$

◆ 1 次変換の合成 加藤 線形代数 p.10

定義 (合成写像)

加藤 線形代数 p.10

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ があるとき, $x \in X$ を, **まず f , 次に g** で写すことで像を得る写像

$$h: X \rightarrow Z$$

を考え, $h = g \circ f$ と書く.

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である.

この h を, f と g の**合成写像** (composition) という.

- $X = Y = Z$ なら, f, g, h は X の変換. h は**合成変換**
- $Z = Y = \mathbb{R}$ なら f, g は関数, h は**合成関数**

合成写像は f, g の順序による

f と g, g と f の合成写像は異なる. $g \circ f \neq f \circ g$.

L08-Q3

Quiz(写像の合成)

\mathbb{R} の変換 f, g を考える.

$$f : x \mapsto \sin x,$$

$$g : x \mapsto x^2 + 3.$$

- 1 実数 x を, まず f で写し, 次に g で写した像を答えよう.
- 2 実数 x を, まず g で写し, 次に f で写した像を答えよう.
- 3 合成変換 $g \circ f$ の像 $(g \circ f)(x)$ を求めよう.
- 4 合成変換 $f \circ g$ の像 $(f \circ g)(x)$ を求めよう.

加藤 線形代数 例題 4(p.11)

加藤 線形代数 例題 5(p.11) **でその上の部分を解説**

例

1 次変換 f を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 1 次変換 g を表す行列を $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ とする.

まず f , 次に g で写す 1 次変換 $h = g \circ f$ を表す行列 C を求めよう.

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とする.

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = B \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y) - (2x-y) \\ -5(x+y) + 3(2x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x+3y \\ 1x-8y \end{bmatrix}.$$

この 1 次変換を表す行列は $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$.

任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $C\mathbf{x} = B(A\mathbf{x})$ が成立する.

行列 C を B と A の積 加藤 線形代数 p.22 とよび, 記号 BA で表すことにしよう.

まず f , 次に g だから BA

まず g , 次に f なら AB

一般に BA はどんな式で書ける?

行列の積 加藤 線形代数 p.22

x を使わず、行列だけで完結して合成変換を求められる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (ae + bg)x + (af + bh)y \\ (ce + dg)x + (cf + dh)y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定義 (行列の積)

行列の積 (右辺) を左辺で定義する。

$$\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

下左 = 下 . 左

$BA \neq AB$. なぜなら $g \circ f \neq f \circ g$ だから。

加藤 線形代数 例題 5 mobius K0.3.10

L08-Q4

Quiz(1 次変換の合成と行列の積)

\mathbb{R}^2 の変換を考える.

- ① x 軸に関する対称変換 f を表す行列 A を求めよう.
- ② 直線 $y = -x$ に関する対称変換 g を表す行列 B を求めよう.
- ③ 行列の積 BA を計算しよう.
- ④ 行列の積 AB を計算しよう.
- ⑤ 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を, まず f で, 次に g で写した像を求めよう (順に写す, 行列を一度にかける, の 2 つの方法で).
- ⑥ 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を, まず g で, 次に f で写した像を求めよう (順に写す, 行列を一度にかける, の 2 つの方法で).

mobius K0.3.20

写像が等しいとは 加藤 線形代数 p.12,191

定義 (写像が等しい 加藤 線形代数 p.12)

$f: X \rightarrow Y$ と $g: Z \rightarrow W$ が等しい ($f = g$) (写像として等しい) とは、 $X = Z, Y = W$ であって、 X の任意の要素 $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ (要素として等しい) が成り立つことをいう。

命題 (1 次変換と行列の 1 対 1 対応)

\mathbb{R}^2 の 1 次変換が $f = g$ であること

$\Leftrightarrow f, g$ を表す行列の 4 個の数がそれぞれ等しいこと

3 個以上の写像の合成 加藤 線形代数 p.12, 3 個以上の行列の積

f, g, h を写像とする。
任意の $x \in X$ に対して,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))), \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

↪ 3 個の合成写像は, 2 個ずつの合成をどの順序でしてもよい.

写像の結合法則 (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

この両辺を, 便利な記号として, $h \circ g \circ f$ と書きちゃう.

f, g, h が 1 次変換とし, これらを表す行列を A, B, C とする.

$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ の表す行列を考えて,

↪ 行列の積の計算の順序によらない.

行列の積の結合法則 (associativity) $C(BA) = (CB)A$

これを, 便利な記号として, CBA と書きちゃう.

3 個の行列の積は, 2 個ずつの積をどういう順序で計算してもいい.