逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L09(2024-05-10 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-11 Sat 10:18 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §0.3(p.14) 角 θ の回転行列 R_θ を書ける
- 加藤 線形代数 §1.3(p.34) 行列 A の逆行列 A^{-1} を書ける
- 加藤 線形代数 §0.3(p.12) 逆写像と逆行列を説明できる

L08-Q1

Quiz 解答:1 次変換を表す行列の求め方

対称変換 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は, $f:\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]\mapsto\left[\begin{smallmatrix}y\\x\end{smallmatrix}\right]$.
1 次変換 f を表す行列を $A=\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ とすると,

$$\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}y\\x\end{smallmatrix}\right]$$

は, x,y についての恒等式．よって, $a=d=0, b=c=1.$

$$A=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$$

別解
1 次変換であることがわかっているなら，一般の点 $\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]$ でなくても, 必要条件として具体的な ($\mathbb{R}^2$ なら) 2 点，例えば $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ の写る先を考えて A を決定できる．

L08-Q2

L08-Q3

Quiz 解答: 写像の合成

1. $f(x) = \sin x.\ \ g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3.$
2. $g(x) = x^2 + 3.\ \ f(g(x)) = \sin(x^2 + 3).$
3. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3.$
4. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 + 3).$

L08-Q4
Quiz 解答:1 次変換の合成と行列の積

1. $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$
2. $g(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}.$
   $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$
3. $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$
4. $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$
5. $(g \circ f)(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}.$
6. $(f \circ g)(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$

ここまで来たよ

◆回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

例 (回転変換)

原点のまわりに一般角 θ だけ回転移動する 1 次変換 f_θ を表す行列 (回転行列) は

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

なぜなら, 1 次変換であることを仮定して,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

から 行列 R_θ を決めるとそうなる.

覚え方

自分の言葉でどうぞ

L09-Q1

Quiz(回転移動の 1 次変換の行列)

1. 点 $\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix}6\\2\end{smallmatrix}\right]$ を, 原点を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動した点 $\boldsymbol{x}'$ を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{x}'$ を, さらに, 原点を中心に $\frac{1}{3}\pi$ だけ回転移動した点 $\boldsymbol{x}''$ を求めよう.

当然そうなるべきだが，$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ が，三角関数の加法定理から示せる.

加藤 線形代数 例題 6(p.14) mobius K0.3.40

ここまで来たよ

8 写像の合成・行列の積|0 章平面と 1 次変換

9 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換
- ◆回転と 1 次変換|3. いろいろな 1 次変換
- ◆逆写像|3. いろいろな 1 次変換

最初にまとめ

写像・変換の言葉 (一般的)	行列・ベクトルの言葉
$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$	2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$
$\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 f	(2×2) 行列 A
$\boldsymbol{x}$ の像は $f(\boldsymbol{x})$	行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$
1 次変換 f, g の合成変換 $g \circ f$	行列の積 BA
1 次変換 f の逆変換 f^{-1}	逆行列 A^{-1}

◆逆写像

復習+ちょっと

写像

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (domain) → 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 (element) ↦ 像 (image)

「 $f(a) = b$」「写像 f による a の像は b」「写像 f は a を b に写す」

定義 (値域 (range) 加藤 線形代数 p.12)

終域の部分集合 $\{f(x)|x \in X\} \subset Y$ を f の値域という.

定義 (上への (onto) 写像, 全射 (surjection) 加藤 線形代数 p.12)

f は X から Y の上への写像 $\Leftrightarrow$ 値域=終域

定義 (1 対 1 の (one-to-one) 写像, 単射 (injection) 加藤 線形代数 p.13)

f は 1 対 1 の写像 $\Leftrightarrow (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

定義 (全単射 (bijection) 加藤 線形代数 p.13)

f が全単射 $\Leftrightarrow$ f が Y の上への 1 対 1 の写像

定義 (逆写像)

f が Y の上への 1 対 1 の写像であるとき
Y の各要素 y に対して $f(x) = y$ となる X の要素がただひとつ定まる.
$g : y \mapsto x$ で写像 $g : Y \to X$ を定める.
g を f の逆写像といい, f^{-1} とかく.

$$f^{-1} : Y \to X$$
$$f(x) \mapsto x$$

変換なら 逆変換
写像・関数の肩の $^{-1}$ は (逆数ではなく) 逆写像・逆関数

L09-Q2

Quiz(逆変換)

1. $\mathbb{R}$ の変換 $f : x \mapsto 3x$ に逆変換があれば求めよう.
2. $\mathbb{R}$ の変換 $g : x \mapsto x^2$ に逆変換があれば求めよう.
3. $\mathbb{R}$ の変換 $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ に逆変換があれば求めよう.

(変換は写像)

逆写像の性質

命題 (逆写像の逆写像)

逆写像の逆写像はもとの写像．すなわち $(f^{-1})^{-1} = f$

定義 (恒等写像 (恒等変換))

$\mathrm{id}_X : X \to X$
$\mathrm{id}_X : x \mapsto x.$

命題 ($\mathbb{R}^2$ の恒等変換)

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ は 1 次変換で，単位行列 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される．

命題 (逆写像の性質)

$f : X \to Y$, 1 対 1 で上への写像のとき，
$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$
$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

1 次変換の逆変換の行列は?

逆行列を求める

例 (一般の 1 次変換の逆変換)

1 次変換 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が 1 対 1 で X の上への変換であるとする. f が行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表現されるとき, f^{-1} を表現する $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ は?

考え方 1
A は $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ だから,
$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ だから, ここから B を求める.
考え方 2 $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ より

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

未知数 p, q, r, s の 4 元 1 次方程式. これを解く.

定義 (逆行列)

1 次変換 f を表す行列が $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき, 逆変換 f^{-1} があるなら, それを表す行列を A の逆行列 (inverse) A^{-1} といい,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$$

とかける. 略記 $\Delta = ad - bc$ (ギリシャ文字デルタ. ‘デターミナント’).

証明 加藤 線形代数 p.32 . 検算は容易.

命題 (逆行列の逆行列, 逆行列の性質)

A の逆行列が A^{-1} であるとき

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad \text{逆写像の逆写像より}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad \text{逆写像の性質より}$$

L09-Q3

Quiz(逆行列)

行列 $A = \left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{smallmatrix}\right]$ に対して, $BA = E$ を満たす行列 B を求めよう.

加藤 線形代数 例題 4(p.36) 加藤 線形代数 練習 7(p.36) (検算容易)

mobius K0.3.30

チーム課題 L09

行列のスカラー倍

定義 (行列のスカラー倍)

記号 $k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times k$ を次のように定義する．

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times k = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

記号は 空白でも $\times$ でも $\cdot$ でもよい (実数同士の積と同じ気分)

例

相似変換の表示相似比 k の相似変換 (k 倍の拡大) を表す行列 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ は，単位行列 E を用いて，$k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = kE$ とも書ける．

L09-Q4

Quiz(スカラー倍の逆行列)

逆行列 $\left(3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1}$ を求めよう．