行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L10(2024-05-15 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-15 Wed 11:17 JST hig"

今日の目標

- 行列の型と成分と行ベクトル列ベクトルを読み取れる
- 一般の型の行列の和とスカラー倍を計算できる
- 一般の型の行列の積を計算できる

L09-Q1

Quiz 解答: 回転移動の 1 次変換の行列

1.

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & +\cos\frac{2}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

2.

$$\boldsymbol{x}'' = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{3}\pi & -\sin\frac{1}{3}\pi \\ \sin\frac{1}{3}\pi & +\cos\frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

行列の積を先に計算してもよい． $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = R_\pi$ になる．
当然そうなるべきだが，一般に，$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ が，三角関数の加法定理から示せる．

L09-Q2

Quiz 解答: 逆変換

1. 全単射になっている. $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}: x\mapsto \frac{1}{3}x$.
2. g は全射でも単射でもないので, g^{-1} は存在しない.
3. h は全射ではない (単射ではある) ので, h^{-1} は存在しない ($\log x$ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体ではない).

L09-Q3

Quiz 解答: 逆行列

逆行列 A^{-1} の定義から $B=A^{-1}$.
(または，逆行列 A^{-1} があるとすれば，両辺の右から A^{-1} をかけて，$BAA^{-1}=EA^{-1}$ すなわち $B=A^{-1}$)
2 次の逆行列の公式から, $A^{-1}=\frac{1}{1\cdot3-2\cdot4}\begin{bmatrix}3&-2\\-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}&+\frac{2}{5}\\+\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$.
または，B の成分を未知数として 4 元連立 1 次方程式を解いても求められる.

ここまで来たよ

9 逆写像・逆行列・回転変換・回転行列|0 章平面と 1 次変換

10 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念
- 1. 行列とは何か
- ◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, ゼロ行列 | 2. 行列の演算
- ◆行列の積 | 2. 行列の演算

◆行列とは

定義 (行列 加藤 線形代数 定義 1-1(p.16))

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を m 行 n 列の 行列 という.

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ を A の (i,j) 成分という 加藤 線形代数 p.17

加藤 線形代数 例 1(p.17), 練習 1,2(p.18) mobius K1.1.10

正方行列

定義 (正方行列 加藤 線形代数 p.17)

行列 A が n 行 n 列であるとき, A は n 次の正方行列という.
$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という. 対角成分以外 0 の行列を対角行列という. 加藤 線形代数 §1.3

定義 (行ベクトル, 列ベクトル 加藤 線形代数 p.17)

- m 行 1 列の行列を縦ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 A の中の $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$ を, 行列 A の第 j 列という 加藤 線形代数 p.16
- A の第 j 列を m 行 1 列の行列すなわちベクトル (列ベクトル, 縦ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ を, A の第 j 列ベクトルという 加藤 線形代数 なし mobius
  <a,b,c>
- 1 行 n 列の行列を横ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 A の中の $a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}$ を, 行列 A の第 i 行という 加藤 線形代数 p.16
- A の第 i 行を 1 行 n 列の行列すなわちベクトル (行ベクトル, 横ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ を, A の第 i 行ベクトルという 加藤 線形代数 なし 大
  注意:mobius <a|b|c>

加藤 線形代数 例 2(p.18), 練習 3(p.18) mobius K1.1.10

ベクトルは行列の一種だが, mobius では, m 行 1 列の行列<<a,b,c>> と, 列ベクトル (縦ベクトル)<a,b,c> を区別する, など. mobius L00.04

ここまで来たよ

◆行列の相等, 和, 差, スカラー倍, 零行列

- 行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19)
  - ある概念で, 2 つが「等しい」ことの定義は自明ではない. 例: 三角形
- 行列の和と差 加藤 線形代数 定義 2-2(p.19)
  - 型が同じ時だけ，行列の間の和と差が定義される
- 行列のスカラー (定数) 倍 加藤 線形代数 定義 2-3(p.19)
  - 特別な例として，$-A$ は A のスカラー -1 倍.

ちょっと，前から知ってるベクトルに似てる··· ベクトルは m 行 1 列の行列だから.

零行列, ゼロ行列

定義 (零行列 加藤 線形代数 定義 2-4(p.22))

O (英字大文字)
すべての成分が 0 である行列.
m 行 n 列であることを特に示すときは, O_{mn}.

定理 (零行列を含む行列の和 加藤 線形代数 定理 2-1(p.22))

行列の型があっているとき,
$A+O=O+A$.
$A+(-A)=(-A)+A=A-A=O$.

なるべく行列の変数 A,B,O のまま計算し, 成分で書くのは最後の手段

加藤 線形代数 例 1, 例題 1,2, 練習 1,2(pp.20–21) mobius K1.2.10

ここまで来たよ

和の記号 $\sum$ の意味を再確認

i	1	2	3	4	5
a	2	3	5	7	11
b	111	107	105	103	102

$a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$
$b_1 = 111$, $b_2 = 107$,$b_3 = 105$, $b_4 = 103$, $b_5 = 102$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = 3+5+7 = \sum_{j=2}^{4} a_j,$$

$$\sum_{i=2}^{4} 2^{a_i} = 2^3 + 2^5 + 2^7,$$

$$\sum_{i=0}^{2} a_{i+2} = 3+5+7,$$

$$\sum_{k=3}^{5} b_k = 105+103+102,$$

$$\sum_{i=p}^{q} g(a_i) = g(a_p) + g(a_{p+1}) + \cdots + g(a_q).$$

$$\sum_{i=0}^{2} b_{5-i} = 102+103+105,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_i = 3 \cdot 107 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 103,$$

$$i=2, \sum_{j=2}^{4} a_i b_j = 3 \cdot 107 + 3 \cdot 105 + 3 \cdot 103,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_{6-i} = 3 \cdot 103 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 107,$$

$$\vdots$$

mobius　K1.1.30

◆行列の積

定義 (行列の積 加藤 線形代数 定義 2-5)

- 行列 A ($\ell \times m$ 型, 成分 a_{ij} $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 B ($m' \times n$ 型, 成分 b_{ij} $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 A, B の積 AB が定義され,

- 行列 $C = AB$ ($\ell \times n$ 型, 成分 c_{ij} $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ell = 2, m = m' = 3, n = 2.$

$$\begin{aligned} c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ &= -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3 \end{aligned}$$

行列の積のルールの直観的おぼえ方

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$ もこの一例と思える.

横ベクトルと行列の積. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ 縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要.

ベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は (まだ) 一例とは思えない (型があってない).

Quiz(成分の和の記号)

n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して，次の図の ■ の位置の成分 a_{ij} の和を，$\sum$ と a_{ij} を使って表そう．正解は 1 つではないが，1 つ答えればよい．

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \end{bmatrix}$$

Hint. $n=5$ と思って a_{ij} の和で書いてみよう．$\sum$ の式はそれと一致する?

a_{ij} の i,j の関係はあってる? 最大最小の i はあってる?

単位行列

定義 (単位行列 加藤 線形代数 p.24)

n 次の単位行列 E or E_n とは,
n 次正方行列で
(i,j) 成分が $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ であるものをいう.

行列の積の演算法則

定理 (行列の積の演算法則 加藤 線形代数 定理 2-2)

以下, 積の型はあっているとする. A は m 行 n 列とする.

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= A(BC) && \text{結合法則, 当たり前ではない} \\
A(B+C) &= AB + AC && \text{分配法則 1} \\
(A+B)C &= AC + BC && \text{分配法則 2} \\
AE_n &= E_m A = A && \text{単位行列の性質} \\
AO_{nk} &= O_{mk}, \quad O_{\ell m} A = O_{\ell n} && \text{添字は型} \\
\text{略記}A^k &= \underbrace{AA\cdots A}_{k} && (k > 0), \text{行列のべき乗}, A^0 = E.
\end{aligned}
$$

結合法則は，行列が 1 次変換を表す場合には納得した．

なるべく行列の変数 A, B, O, E のまま計算し, 成分で書くのは最後の手段

「成立しない」性質

$AB = BA$ 反例 加藤 線形代数 例 5(p.23)

$AB = O$ ならば ($A = O$ または $B = O$) 反例 加藤 線形代数 例 9(p.26)

「任意の A, B に対して成立するわけではない」という意味．$A = B$ なら $AA = AA$, のような，たまたま成立する場合はある．

加藤 線形代数 練習 4,5,6(p.27), mobius K1.2.30

実数やベクトルからの類推を使わず, 上の法則だけを使う

例 $(AB)^2$

例 $(A-B)(A+B)$

例 $(A^2B+E)^2$

オンライン (オンデマンド) 授業のお知らせ (2024-05-22 水 1 予定)

授業内容の特性から, また, 今後必要になるかもしれないオンライン授業の練習として, 2024-05-22 水 1 の授業は，龍大標準方式のオンライン (オンデマンド) で行います.

場所 オンライン (オンデマンド) は，大学（発話は必要ないので，図書館やスチューデントコモンズや，空き教室）で参加しても自宅で参加してもかまいません.

日時 締切までに動画を視聴して課題を提出すれば，この講時内に活動しなくてもかまいません.

方法 manaba のコースニュースを見て，manaba のコンテンツで学習を進めてください.

準備 事前にシステムが使えるかどうか試し練習しておいてください. 2024-05-17 金 (?) にお知らせする予定.