和の記号・行列のブロック分け・トレース | 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L11(2024-05-17 Fri)

最終更新: Time-stamp: ”2024-05-17 Fri 07:17 JST hig”

今日の目標

- 行列をブロック分けして計算できる
- $\sum$ と添字で成分の計算ができる
- 行列のトレースを計算できる

L10-Q1

Quiz 解答: 回転移動の 1 次変換の行列

1.

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & +\cos\frac{2}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

2.

$$\boldsymbol{x}'' = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{3}\pi & -\sin\frac{1}{3}\pi \\ \sin\frac{1}{3}\pi & +\cos\frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

行列の積を先に計算してもよい. $\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right] = R_\pi$ になる.
当然そうなるべきだが，一般に，$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$ が，三角関数の加法定理から示せる.

L10-Q2

Quiz 解答: 逆変換

1. 全単射になっている．$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{3}x$.
2. g は全射でも単射でもないので, g^{-1} は存在しない.
3. h は全射ではない (単射ではある) ので, h^{-1} は存在しない ($\log x$ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体ではない).

L10-Q3

Quiz 解答: 逆行列

逆行列 A^{-1} の定義から $B = A^{-1}$.

(または，逆行列 A^{-1} があるとすれば，両辺の右から A^{-1} をかけて，$BAA^{-1} = EA^{-1}$ すなわち $B = A^{-1}$)

2 次の逆行列の公式から, $A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 3 - 2\cdot 4}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & +\frac{2}{5} \\ +\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

または，B の成分を未知数として 4 元連立 1 次方程式を解いても求められる.

ここまで来たよ

対角成分以外はゼロの行列 (対角行列) の積は楽

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

じゃあこの「ブロック対角行列」は?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} = ?$$

実は

$$\begin{bmatrix} D & O \\ O & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & O \\ O & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DJ & O \\ O & HM \end{bmatrix}$$

O は 2 次のゼロ行列，D, H, J, M は 2 次の正方行列, DJ,HM は行列の積で，その中をさらに計算する.
ブロック分け=行列を 2 階層で考える.

◆行列の区分け (ブロック分け) 加藤 線形代数 p.27

加藤 線形代数 p.27 の解読

n 行 m 列の行列 $A = [a_{ij}]$ を, 縦横に格子状に分割する. 例えば 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

D, F, G, H は行列. 正方でなくても, 同サイズでなくてもいい. 加藤 線形代数 では $D = A_{11}$ のように書いてあるけど, これは行列 (A の小行列 (submatrix)). 11 は行列につけた番号. $D = A_{11} = [d_{ab}]$.

$$AB = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & K \\ L & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & P \\ Q & R \end{bmatrix} = C$$

とする. ここで, B の列の分割 (J, L の境い目) は, D, F の境い目と一致している必要がある.

N, Q の境い目は D, G の境い目, N, P の境い目は J, K の境い目と一致する (行列の型のルールに似てる)

行列の積を 2 段階に分けて，ブロックごとに計算できる

$N = DJ + FL$ 行列の積っぽいルール．行列の積と和．順序に意味あり

$DJ = [s_{tv}]$とすると

$$s_{tv} = \sum_u d_{tu} j_{uv}$$ 行列の積．成分で書いた

証明 成分で書いてみると両辺同じ

加藤 線形代数 例 10(p.28)

加藤 線形代数 練習 7(p.29) 加藤 線形代数 練習 8(p.29) ブロック対角のとき，ブロック分けで積を考えると楽，という例．

mobius K1.2.50

◆行列の区分け (列ベクトルへの分割) 加藤 線形代数 p.29

ブロック分けの小行列として, 列ベクトルを選んだ場合の一例

3 次の正方行列 C, $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}$(注: この 1,2,3 は, 1,2,3 番目のベクトルという意味), 縦ベクトル $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$ (この 1,2,3 は成分の番号)

加藤 線形代数 p.29 $A\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1\boldsymbol{x}_1 & k_2\boldsymbol{x}_2 & k_3\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}$.

また,

$$CA = C \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\boldsymbol{x}_1 & C\boldsymbol{x}_2 & C\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}$$

行列の区分け (行ベクトルへの分割)

ブロック分けの小行列として, 行ベクトルを選んだ場合の一例

3 次の正方行列 B を 3 つの行ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ に分割して $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{bmatrix}$ と書くと,

$$D = BA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}.$$

すなわち, $D = [d_{ij}]$ とすると, $d_{ij} = \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{x}_j$.

mobius K1.2.50

ここまで来たよ

10 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

11 和の記号・行列のブロック分け・トレース｜第 1 章 行列の概念
- ◆行列の区分け (ブロック分け)| 2 行列の演算
- 和の記号｜2. 行列の演算

行列の成分表示と $\sum$ の演算 加藤 線形代数 pp.17,24

$A = [a_{ij}]$:「行列 A の成分として a, 行の添字として i, 列の添字として j を使うよ」
$AB = [c_{ik}]$「積 AB の成分を c_{ik} と書くよ」
これを濫用 (?) して, 行列の和を $[a_{ij}] + [b_{ij}]$ と書いたりする.

$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$「「行列の和」の成分は, 成分の和である」

$k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$ 「行列のスカラー倍」の成分, は成分のスカラー倍

行列の積の復習

定義 (行列の積 加藤 線形代数 定義 2-5)

- 行列 A ($\ell \times m$ 型, 成分 a_{ij} $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 B ($m' \times n$ 型, 成分 b_{ij} $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 A, B の積 AB が定義され,

- 行列 $C = AB$ ($\ell \times n$ 型, 成分 c_{ij} $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

Quiz(成分の和の記号)

n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して，次の図の ■ の位置の成分 a_{ij} の和を，$\sum$ と a_{ij} を使って表そう．正解は 1 つではないが，1 つ答えればよい．

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \end{bmatrix}$$

Hint. $n=5$ と思って a_{ij} の和で書いてみよう．$\sum$ の式はそれと一致する?
a_{ij} の i,j の関係はあってる? 最大最小の i はあってる?

行列のトレース

定義 (トレース 加藤 線形代数 章末問題 1.6(p.39)**)**

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列に対して, 次の対角成分 a_{ii} の和をトレース (trace) という.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$:=$ 左辺の新しい記号, 用語を右辺で定義する, という記号. $\equiv$, $\triangleq$ など.

命題 (トレースの性質 加藤 線形代数 章末問題 1.6(p.39)**)**

A, B: n 次正方行列

1. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
2. c: 実数に対して, $\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A)$.
3. 延期
4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ の証明

単位行列

定義 (単位行列 加藤 線形代数 p.24)

n 次の単位行列 E or E_n とは,
n 次正方行列で (i,j) 成分が $e_{ij}=\delta_{ij}$ であるものをいう.

定義 ((復習) クロネッカーのデルタ記号)

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

対角行列

定義 (対角行列 加藤 線形代数 §1.3)

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ で，$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という．
対角成分でない成分が 0 である行列 ($i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ である行列) を対角行列という．

n 次対角行列の具体的な表示

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \Large 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$D = [d_{ij}]$ とすると，クロネッカーのデルタを使って

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} (= \lambda_j \delta_{ij})$$

和 $\sum$ とクロネッカー記号 δ_{ij} の補足

和 $\sum$ 内のクロネッカー記号 δ_{ij}

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} F_{ijkl} G_{ijkm} \delta_{ij} \\
=&F_{ijkl} G_{i1km} \delta_{i1} + \cdots + F_{iikl} G_{iikm} \delta_{ii} + \cdots + F_{inkl} G_{inkm} \delta_{in} \\
=&0 + \cdots + 0 + F_{iikl} G_{iikm} \cdot 1 + 0 + \cdots + 0 \\
=&F_{iikl} G_{iikm}
\end{aligned}$$

「$\sum_j \delta_{ij}$ナンン j トカ は, $\sum_j \delta_{ij}$ を消す代わりに, 代入 $j = i$ でダミー添字 j を消せばいい」

F, G が別の $\sum$ や δ を含んでいてもかまわない.

$\sum$ と δ_{ij} の計算の例題

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \delta_{i1} F_{ijk} = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \delta_{k1} F_{ijk} = ?$$

単位行列の性質

任意の n 次正方行列 A に対して，$AE = EA = A$ を示そう．

非零対角成分の対角行列の逆行列

n 次対角行列 D のすべての対角成分 λ_i が 0 でないとき，D の逆行列が，対角成分を λ_i^{-1} とする対角行列であることを示そう．

行列の積の結合則 $((AB)C = A(BC))$ の証明

型	$\ell \times m$	$m \times n$	$n \times p$	$\ell \times n$	$\ell \times p$	$\ell \times p$
行列	$A = [a_{ij}]$	$B = [b_{jk}]$	$C = [c_{kq}]$	$AB = [d_{ik}]$	$(AB)C = [f_{iq}]$	$A(BC) = [g_{iq}]$

$(AB)C$, $A(BC)$ のすべての成分が等しければ等しい．

$$
\begin{aligned}
f_{iq} &= \sum_{k=1}^{n} d_{ik} c_{kq} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kq} && (a_{ij} b_{jk} c_{kq} = x_{jk} \text{ とおくと}) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) && ((x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22})) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{(j,k)=(1,1)}^{(n,m)} a_{ij} b_{jk} c_{kq} && (x_{11} + x_{21} + x_{12} + x_{22}) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) && ((x_{11} + x_{12}) + (x_{21} + x_{22})) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} c_{kq} \right) = g_{iq}.
\end{aligned}
$$

(1) 分配法則 $(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{13}=a_{11}b_{11}c_{13}+a_{12}b_{21}c_{13}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{jk}\right)$ って, 結局 $n\times m$ 個に長方形状に並んだ x_{jk} を全部加えろってこと.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}x_{jk}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}x_{jk}\right)$$

順序に意味ないから, $\displaystyle\sum_{1\le j\le m,1\le k\le n}$ みたいに書いちゃうこともある.

オンライン (オンデマンド) 授業 L12(2024-05-22 水 1)

授業内容の特性から, また, 今後必要になるかもしれないオンライン授業の練習として, 2024-05-22 水 1 の授業は，龍大標準方式のオンライン (オンデマンド) で行います.

日時 2024-05-20 月 1 公開．2024-05-24 金 09:15 までに動画を視聴して課題 (mobius) を提出してください．水 1 には限定されません.

場所 オンライン (オンデマンド) は，大学（発話は必要ないので，図書館やスチューデントコモンズや，空き教室）で参加しても自宅で参加してもかまいません.

方法 manaba のコースニュースを見て，manaba のコンテンツで学習を進めてください.

準備 manaba の線形代数コースのコンテンツに「参加方法」を載せています．事前に学習方法の練習をしておいてください.

Trial 2024-05-22 水の Trial L11 はオンラインで 2024-05-24 金 09:15 まで, 2024-05-24 金の Trial L12 はふだん通り紙で 09:15 から.