転置行列・正則行列| 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L12(2024-05-22 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-17 Fri 12:08 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.30 転置行列の定義と計算が説明できる
- 加藤 線形代数 p.32 正則行列の定義と計算が説明できる
- オンデマンドオンライン授業で学習できる

ここまで来たよ

◆転置行列

定義 (転置行列 加藤 線形代数 定義 3-1(p.30))

m 行 n 列の行列 $A = [a_{ij}]$ に対して, n 行 m 列の行列 $B = [b_{ji}]$ で

$$b_{ji} = a_{ji}$$

であるものを A の転置行列 (transposed matrix) といい, ${}^{t}A$ と書く.

A の t 乗 $A^t (t = 1, 2, \ldots)$ と間違えないために, 左上に立体で頭文字 t とかく.

例 (転置行列)

縦ベクトルの転置は横ベクトル, 横ベクトルの転置は縦ベクトル.

$$ {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} $$

加藤 線形代数 章末問題 1,2(p.39)

例 (転置行列)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が縦ベクトルのとき,

$$ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} $$

縦ベクトルの内積　行列の積

転置行列の性質

定理 (転置行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-1(p.31))

A, B を行列, $k \in \mathbb{R}$ とするとき,

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) &= A, \\
{}^{\mathrm{t}}(A+B) &= {}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B, \\
{}^{\mathrm{t}}(kA) &= k\,{}^{\mathrm{t}}A, \quad \text{以上まあ当たり前} \\
{}^{\mathrm{t}}(AB) &= {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A. \quad \text{超重要}
\end{aligned}
$$

${}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A$ の証明 加藤 線形代数 練習 1(p.31)

証明

型はあってる (${}^{t}(AB) = {}^{t}A\,{}^{t}B$ じゃあわない).

あとは成分が等しいことを言う (行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19))).

$A = [a_{ik}], B = [b_{kj}], AB = [c_{ij}]$,

${}^{t}A = [p_{ki}]$, ${}^{t}B = [q_{kj}]$, ${}^{t}(AB) = [r_{ji}]$ とすると,

$p_{ki} = a_{ik}, q_{jk} = b_{kj}, r_{ji} = c_{ij}$.

L12-Q1

Quiz(転置の積の成分表示)

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ を考える.

1. A^2 の (i,j) 成分を求めよう.
2. ${}^{\mathrm{t}}\!AA$ の (i,j) 成分を求めよう.
3. $A\,{}^{\mathrm{t}}\!A$ の (i,j) 成分を求めよう.

ここまで来たよ

加藤 線形代数 p.32

n を固定したとき,
n 次正方行列全体の集合は和, 差, 積 (, 転置) の操作のもとで「閉じている」(結果もその集合にはいる).

- $AB \neq BA$ を除けば実数全体の集合と同じ.
- 0 に相当するのが零行列 O.
- 1 に相当するのが単位行列 E.

体, 代数

◆正則行列と逆行列

定義 (正則行列と逆行列 加藤 線形代数 定義 3-2(p.32))

n 次正方行列 A に対して, $XA = AX = E$ となる n 次行列が存在するとき, A を正則行列 (non-singular matrix) といい, X は A の逆行列 (inverse matrix) であるという.

A が正則かどうか判定する方法

$n \times n$ 元連立 1 次方程式 $AX = E$ を解く. 未知数 $X = [x_{ij}]$.

- 解 X が求まったら A は正則行列である. X は逆行列.
- 解なしになったら A は正則行列でない.

$\rightsquigarrow$ 2 次元の公式

正則行列である例, ない例 加藤 線形代数 例題 2(p.32)

命題

正則行列 A の逆行列は 1 つに定まる．それを A^{-1} とかく．

1 つに定まること (唯一性 (uniqueness)) の証明: X, Y とおいて $X = Y$ という

正則行列の性質

定理 (正則行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-2(p.33))

1. A, B が正則行列 ならば, AB も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. A が正則行列 ならば, A^{-1} も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.

記法

P, Q: 命題

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.

$P \Rightarrow Q$: P ならば Q, P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P: 仮定, Q: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P \backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	偽	真

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P \backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

P ならば Q の証明: P を仮定して Q を導く

2 次の正則行列と逆行列

定理 (2 次の正則行列と逆行列 加藤 線形代数 (p.34))

2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して, $\Delta = ad - bc$ とおくと,

1. $\Delta \neq 0$ ならば A は正則行列で, 逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
2. $\Delta = 0$ ならば A は正則行列でなく, 逆行列は存在しない.

$\Delta \neq 0$ は, A が正則行列であるための必要十分条件

$\Delta = \det A = |A|$ などと表し, A の行列式 (determinant) という.
今後, 3 次以上の行列にも行列式が定義される 加藤 線形代数 第 4 章.
行列式は行列でない. 行列式は 1 個の実数.

加藤 線形代数 例題 4(p.36)

逆行列の性質

定理 (逆行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-3(p.36))

A, B を n 次の正則行列とする (逆行列はある).

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. (定義そのもの)
2. $AB = E$ ならば, $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ (意味: 片側のチェックでいい)
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (再掲)
4. $(A^{-1})^{-1} = A$ (再掲)
5. $k \neq 0$ のとき, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ (わかる)

加藤 線形代数 練習 7(p.36)

$AB = E$ ならば, $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ の証明 加藤 線形代数 練習 5(p.36)

ブロック分けされた行列の逆行列 加藤 線形代数 なし

ブロック分けされた正方行列

$$A = \begin{bmatrix} D & O \\ O & H \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} J & O \\ O & M \end{bmatrix},$$

で D, J が同じ次数の正方行列, H, M が同じ次数の正方行列 だと積が考えられ,

$$AB = \begin{bmatrix} DJ & O \\ O & HM \end{bmatrix}$$

なのだった. 加藤 線形代数 例 10(p.28)

ブロック対角行列の逆行列

正方行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} D & O \\ O & H \end{smallmatrix}\right]$ で, D, H が正則行列のとき, A も正則行列で, 逆行列は

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & H^{-1} \end{bmatrix}.$$