1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L13(2024-05-24 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-25 Sat 10:01 JST hig"

今日の目標

- 行列の和差逆スカラー倍を含む計算ができる
- 平面の 1 次変換による直線の像を, パラメタ表示と方程式で求められる
- 正射影を表す行列を求められる

L12-Q1

Quiz 解答: 転置の積の成分表示

${}^{\mathrm{t}}A = [b_{ji}]$ とすると, $b_{ji} = a_{ij}$.

1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$
3. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$

ここまで来たよ

12 転置行列・正則行列| 第 1 章 行列の概念

13 1 次変換による直線の像 | 第 1 章 行列の概念

- 逆行列と転置行列
- 第 0 章 4'. 1 次変換による像
- 1 次変換としての正射影

転置の逆, 逆の転置

$({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$ は成立するか?

アドバイス 難しい問はまず 2 次行列や例で考えてみる. 反例が見つかったらもうけもの.

ここまで来たよ

写像の像

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ について, 2 次正方行列 A で表される 1 次変換 f による像を $\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ とする.
移動前 $\boldsymbol{x}$, 移動後 $\boldsymbol{x}'$.
点でなく部分集合についての定義.

定義 (写像による部分集合の像 加藤 線形代数 p.191)

$f : X \to Y$ を写像とする. 部分集合 $S \subset X$ について,
$f(S) = \{f(x) | x \in S\} \subset Y$ を, 写像 f による S の像という.

「S は f で $f(S)$ に写る」

正方形・平行四辺形の像

$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\begin{aligned} S =& \left\{ \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right] \middle| 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1, s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ =& \{ \boldsymbol{e}_1 s + \boldsymbol{e}_2 t | 0 \le s \le 1, 0 \le t \le 1, s, t \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

は，$\mathbf{0} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ を 4 頂点とする正方形.

正方形の像

正則行列 A で表される 1 次変換 f による，正方形 S の像は？

$$\begin{aligned} f(S) =& \{A(\boldsymbol{e}_1 s + \boldsymbol{e}_2 t) | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R}\} \\ =& \{A\boldsymbol{e}_1\ s + A\boldsymbol{e}_2\ t | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

これは，$\mathbf{0}, A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, A\boldsymbol{e}_1 + A\boldsymbol{e}_2$ を 4 頂点とする平行四辺形 ($A\boldsymbol{e}_1$ と $A\boldsymbol{e}_2$ が張る平行四辺形)
実は，平行四辺形の像も平行四辺形

> 実は A が正則行列であるなら $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2$ は平行にならない（正方形はつぶれない）．A が正則でないなら正方形は直線や 1 点につぶれる

パラメタ表示された直線の像

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ $(t \in \mathbb{R})$ とパラメタ表示される直線の, 行列 A で表される 1 次変換 f による像は? ($\boldsymbol{a}$ 接ベクトル, $\boldsymbol{c}$ 直線上の点)

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上のパラメタ表示で書ける.
移動後の点 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. A が正則行列なら, 左から A^{-1} をかけて
$A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$.
これをパラメタ表示に代入して, $A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$.
両辺に左から A をかけて, $\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$.

命題 (直線の 1 次変換による像のパラメタ表示)

直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ の, 行列 A の表す 1 次変換による像のパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, これは直線.
A が正則のとき, 1 次変換で直線は直線に写る
接ベクトル $\boldsymbol{a}$ は $A\boldsymbol{a}$ に写る.
「通る点」$\boldsymbol{c}$ は $A\boldsymbol{c}$ に写る.

L13-Q1

Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

パラメタ表示

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

をもつ $\mathbb{R}^2$ の直線 ℓ を考える.

1. 直線 ℓ を描こう.
2. 直線 ℓ 上の点を 2 つ見つけよう（$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とする）.
3. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 f による ℓ の像のパラメタ表示を求め，描こう.
4. 像 $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)$ を求めよう.

mobius　K1.3.60

直線の 1 次変換による像の方程式

方程式 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0$ で表される直線の, 行列 A の表す 1 次変換による像は? ($\boldsymbol{n}$ 法線ベクトル, $\boldsymbol{c}$ 直線上の点)

まず内積をやめて転置を使って行列で書く. $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}={}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}$.

$$
{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0
$$

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上の方程式にしたがう. (A が正則行列なら) $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{x}'$. これを代入し, $E=A^{-1}A$ で細工して

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}(A^{-1}\boldsymbol{x}'-(A^{-1}A)\boldsymbol{c}) &=0\\
{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}A^{-1}(\boldsymbol{x}'-A\boldsymbol{c}) &=0\\
{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n})(\boldsymbol{x}'-A\boldsymbol{c}) &=0\\
({}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}'-A\boldsymbol{c}) &=0
\end{aligned}
$$

命題 (直線の 1 次変換による像の方程式)

直線 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}=0$ の, 行列 A の表す 1 次変換 f による像は, A が正則のとき,

$$\left({}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n}\right)\cdot(\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{c})=0.$$

これは直線.

1 次変換で直線は直線に写る

法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は ${}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n}$ に写る.

「通る点」$\boldsymbol{c}$ は $A\boldsymbol{c}$ に写る.

L13-Q2

Quiz(方程式で定まる直線の 1 次変換による像)

方程式

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

で定まる $\mathbb{R}^2$ の直線 ℓ を考える.

1. 直線 ℓ を描こう.
2. ℓ 上の点を 2 つ見つけよう（$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とする）.
3. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 f による ℓ の像の方程式を求めよう.
4. 像 $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)$ を求めよう.

mobius K1.3.60

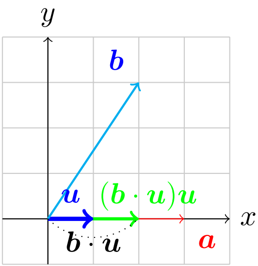
ここまで来たよ

ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトル

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ, $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

定義 (スカラー射影と正射影ベクトル)

ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影とは実数 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = |\boldsymbol{b}| \times 1 \times \cos\theta$. ($\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向き成分ともいう).
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトル (正射影) とは
$(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = (|\boldsymbol{b}| \times 1 \times \cos\theta)\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}$.



L13-Q3

Quiz(正射影ベクトルを与える 1 次変換を表す行列)

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$ への正射影ベクトルを対応させる変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は 1 次変換か．1 次変換なら，f を表す行列を求めよう．

mobius　K1.3.65

定義 (正射影)

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ への正射影ベクトルを対応させる 1 次変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，ベクトル $\boldsymbol{a}$ への正射影という．

直交射影ともいう．
本当は，$\mathbb{R}^n$ で，直線，平面，m 次元部分空間への正射影が定義されるが，ここではこのタイプに限定する．

命題 (正射影の性質)

$\mathbb{R}^2$ で，

- 正射影の値域は，原点を通り $\boldsymbol{a}$ に平行な直線
- 正射影は単射でも全射でもない
- 正射影を表す行列は正則でない

正射影を表す行列

f を $\boldsymbol{a}$ への射影とする．
$\boldsymbol{b}$ の，$\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトルは，

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} \\
&= \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} \cdot \boldsymbol{b}) \\
&= \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\
&= \frac{1}{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

これは行列の積と見なせる．
$\boldsymbol{a}$ への正射影 f を表す行列は，$\frac{1}{{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\,{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}$

L13-Q4

Quiz(正射影ベクトルを与える 1 次変換を表す行列)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ への正射影ベクトルを与える 1 次変換を f とする.

1. f を表す行列を求めよう.
2. f^{-1} は定義されるか？ 定義されるなら f^{-1} を表す行列を求めよう.