3 次元の回転行列・対角行列・上/下三角行列| 第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L14(2024-05-29 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-31 Fri 11:46 JST hig"

今日の目標

- 和差積逆転置スカラー倍の混ざった正方行列の計算ができる
- 空間の 1 次変換の行列を書ける
- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる

L13-Q1
Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

1. 略
2. 例えば $t=0,1$ に対して，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$.
3. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}2&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ すなわち $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-5\\-3\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}$.
4. $f(\boldsymbol{x}_1)=A\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}, f(\boldsymbol{x}_2)=A\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$. これらは，$f$ による ℓ の像の上にある $(t=0,1)$.

L13-Q2
Quiz 解答: 方程式で定まる直線の 1 次変換による像

1. 略
2. $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ はもちろん ℓ 上にある．$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ も方程式を満たし ℓ 上にある.

3. $A\left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right]$.
   ${}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\left[\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix}1&0\\-3&2\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix}3\\-5\end{smallmatrix}\right]$.
   よって,
   $$\frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix}3\\-5\end{smallmatrix}\right]\cdot\left(\boldsymbol{x}-\left[\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right]\right)=0.$$
4. $f(\boldsymbol{x}_1)=AVx_1=\left[\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right]$, $f(\boldsymbol{x}_2)=A\boldsymbol{x}_2=\left[\begin{smallmatrix}9\\3\end{smallmatrix}\right]$ は f の像の方程式を満たすことがわかる.

ここまで来たよ

行列の計算のルール

次のルールだけを使ってよい．ここにないルールは使ってはいけない．

- 積（零行列，単位行列の乗算） $\boxed{\text{加藤 線形代数 定理 2-2(p.26)}}$
- 逆行列のルール $\boxed{\text{加藤 線形代数 定理 3-2(p.36)}}$
- 零行列の加算のルール $\boxed{\text{加藤 線形代数 定理 2-1(p.24)}}$
- 巾の略記 $A^n = \underbrace{AA\dots A}_{n}$, $A^0 = E$, $A^{-n} = (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.
- 定数（専用変数）E 単位行列，O 零行列.

L14-Q1

Quiz(行列の積和逆スカラー倍)

次の行列の積を展開して，括弧がない簡単な形にしよう．

1. $(AB + (2BA)^{-1})(3A + BA)$
2. $B(A + B^2 + B^{-1} + (4AB)^{-1})B^{-1}$

前回のチーム課題から

1. $((2AB)^{-1} + 6B)^2$
2. $(AB + 2A)((2BA)^{-1} + A)$
3. $(A + (BA)^{-1})(B + (10A)^{-1})$
4. $(2A - (2B)^{-1})(B + (AB)^{-1})$
5. $(4A + (2BA)^{-1})^2$

ここまで来たよ

3 次元空間の 1 次変換

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を 3 次の正方行列 A で移動させることができる.

z 軸を回転軸とする xy 平面内の回転　ブロック分け，ブロック対角行列

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & +\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　逆変換は？

x 軸を回転軸とする yz 平面内の回転　ブロック分け，ブロック対角行列

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$　逆変換は？

xz 平面 (平面 $y=0$) に関する対称変換 (鏡映)　対角行列

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　逆変換は？

平面 $x=y$ に関する対称変換 (鏡映)　ブロック分け，ブロック対角行列

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　逆変換は？

L14-Q2

Quiz(3 次元の回転)

y 軸を回転軸とする, xz 平面内の角 θ の回転の線形変換 (1 次変換) を表す行列を書こう．ただし, どっちまわりを正の θ にするかは自由に決めてよい.

3 次元の回転行列とオイラー角

2 次元の回転行列は 1 パラメタ θ で R_θ.
3 次元の任意の回転は, 3 パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).
オイラー角 ψ, θ, ϕ にとることが多い.
3 次元の回転行列は, 角 ψ, θ, ϕ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$
\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html

ここまで来たよ

◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37

定義 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

- A が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- A が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Leftrightarrow$「対角成分でない成分はゼロ」
- A が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = + {}^{\mathrm{t}}A$.
- A が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = - {}^{\mathrm{t}}A$.

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.
$P \Rightarrow Q$: P ならば Q, P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P: 仮定, Q: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P \backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	偽	真

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P \backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

対角行列

n 次対角行列

具体的な表示

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$D = [d_{ij}]$ とすると，クロネッカーのデルタを使って

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} (= \lambda_j \delta_{ij})$$

λ_j $(j = 1, \ldots, n)$ を対角成分という．

対角行列全体は, n 次正方行列の中で, 扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ). 線形代数 II(後期), 代数 (3 年)

何か計算していて対角行列にできたらラッキー　対角化 線形代数 II(後期)

単位行列は，対角成分 $\lambda_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ な対角行列．

L14-Q3

行列と対角行列との積

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ と，対角成分を λ_j $(j = 1, \ldots, n)$ とする対角行列 D を考える．

1. $B = AD$ の (i, j) 成分を求めよう．
2. $C = DA$ の (i, j) 成分を求めよう．

L14-Q4

Quiz(対角行列の積)

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$,$B = [b_{ij}]$ を考える．A, B は対角行列であるとする．

1. 積 AB の (i, j) 成分を求めよう．
2. 積 BA の (i, j) 成分を求めよう．
3. べき乗 A^m $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$ の (i, j) 成分を求めよう．

mobius K1.3.70

L14-Q5

対角行列の逆行列

$\lambda_j \neq 0 \ (j = 1, \ldots, n)$ を対角成分とする対角行列の逆行列を求めよう.

L14-Q6

単位行列

A を任意の n 次正方行列，$B = [\delta_{ij}]$ とする．$AB = BA = A$ を示そう．