証明 連立 1 次方程式と行列 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L15(2024-05-31 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-30 Thu 17:38 JST hig"

今日の目標

- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる
- 加藤 線形代数 §2.1 連立 1 次方程式から係数行列と拡大係数行列を取り出せる

L14-Q1
Quiz 解答: 行列の積和逆スカラー倍

1. $3ABA + AB^2A + \frac{3}{2}A^{-1}B^{-1}A + \frac{1}{2}E.$
2. $BAB^{-1} + B^2 + B^{-1} + \frac{1}{4}A^{-1}B^{-1}.$

L14-Q2
Quiz 解答:3 次元の回転

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

L14-Q3
Quiz 解答: 対角行列の積

$a_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}, b_{ij} = \mu_j \delta_{ij}$ とする．このとき, $\lambda_j = a_{jj}, \mu_j = b_{jj}$ である．

1. $C = AB = [c_{ij}]$ とする.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{ik} \mu_j \delta_{kj}$$

$\sum_k \delta_{ik} \bullet$ を実行して $k = i$ を代入することで,

$$c_{ij} = \lambda_i \mu_j \delta_{ij} = \lambda_j \mu_j \delta_{ij}.$$

よって, $C = AB$ は $\lambda_1 \mu_1, \ldots, \lambda_n \mu_n$ を対角成分とする対角行列.
(i, j) 成分は, $a_{jj} b_{jj} \delta_{ij}$.

2. (厳密には数学的帰納法で) A^m は, $(a_{11})^m, (a_{22})^m, \ldots, (a_{nn})^m$ を成分とする対角行列である. $A^m = [g_{ij}]$ とすると, $g_{ij} = (a_{jj})^m \delta_{ij}$.

ここまで来たよ

証明「示そう」の書き方

仮定 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 **(ギャップを埋める)** 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.
「仮定 Q は前に持っていっていい」

P ならば R の証明

$P \Rightarrow R$

P とする

$\vdots$

$\boxed{\boxed{R}}$

よって $P \Rightarrow R$.

P ならば (Q ならば R) の証明

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

P とする

$\vdots$

Q とする

$\vdots$

R

よって $Q \Rightarrow R$

よって $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

結局，$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには,

$(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.

つまり「仮定 Q は前に持っていっていい」

L15-Q1

Quiz(三角行列対角行列の和)

1. A, B が対称行列ならば，和 $A+B$ も対称行列であることを示そう．
2. A, B が n 次の対角行列ならば, 和 $A+B$ も n 次の対角行列であることを示そう.

加藤 線形代数 練習 8(p.37)

「成り立たない」ことの証明

「成り立つか？」に対して，成り立たないことを言うには，その例 (反例) を 1 個挙げる．
L15-Q2

Quiz(反対称行列と対角行列の和)

反対称行列と対角行列の和は反対称行列か？

考え方

「A が反対称行列かつ B が対角行列**ならば**，$C = A + B$ は反対称行列である」の反例を挙げる．
「P **ならば** Q」が偽になるのは，P が真, Q が偽のときなので，
「A が反対称行列かつ B が対角行列」が真であって，「$C = A + B$ が反対称行列である」が偽であるような例 (反例) をひとつ挙げればよい．

ここまで来たよ

◆連立 1 次方程式の書き方 加藤 線形代数 p.41

変数 $x_1, \ldots, x_n$. 加藤 線形代数 練習 1(p.42) mobius K2.1.10

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\text{係数行列} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\text{未知数ベクトル}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{定数項ベクトル}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$\text{拡大係数行列}\tilde{A} = \left[\, A | \, \boldsymbol{b} \right].$$

◆連立 1 次方程式を解く 加藤 線形代数 p.43

- 「系統的な」解法 (=拡大係数行列を入力, 解を出力とするアルゴリズム) そのもの自身を研究したい
  - その解法は必ず解を出力するのか?
  - 何ステップかかるのか?
- ここでは加減法のみを調べることにして, 代入法は考えない
- 最初に与えられたのと同じ個数 (m 個) の等式をキープして, 同値変形だけを行っていく
- 特定の許された操作のみを行う.

加藤 線形代数 練習 2(p.45), 練習 3(p.47)