行列の基本変形| 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L16(2024-06-05 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-05 Wed 13:07 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.48行基本操作と行基本変形を説明できる
- 加藤 線形代数 p.50階段形, その主成分, 階数の定義を説明できる
- 加藤 線形代数 p.52簡約階段形の定義を説明できる

L15-Q1

Quiz 解答: 三角行列対角行列の和

1 $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ とする.
A, B は対称行列である.
よって $a_{ij}=a_{ji}, b_{ij}=b_{ji}$. (*)
$C=A+B=[c_{ij}]$ とする.
$c_{ij} \overset{\text{行列の和の定義}}{=} a_{ij}+b_{ij} \overset{\text{条件 (*)}}{=} a_{ji}+b_{ji}=c_{ji}$.
$c_{ij}=c_{ji}$
よって，C は対称行列.

構成的)

$A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ を対角行列とする.
よって, $i \neq j$ ならば $a_{ij}=0$, $i \neq j$ ならば $b_{ij}=0$. (*)

$k \neq \ell$ とする.
$A+B=[c_{ij}]$ とおくと,
$c_{k\ell}=a_{k\ell}+b_{k\ell}$ (行列の和の定義)
ここで, (*) より, $a_{k\ell}=b_{k\ell}=0$.
よって $c_{k\ell}=0$.
よって $k \neq \ell$ ならば $c_{k\ell}=0$.
すなわち $A+B$ は対角行列

よって A, B が対角行列ならば $A+B$ は対角行列

L15-Q2

Quiz 解答: 反対称行列と対角行列の和

考え方

「A が反対称行列かつ B が対角行列**ならば**，$C = A + B$ は反対称行列である」の反例を挙げる.

「P **ならば** Q」が偽になるのは，P が真, Q が偽のときなので，

「A が反対称行列かつ B が対角行列」が真であって，「$C = A + B$ が反対称行列である」が偽であるような例 (反例) をひとつ挙げればよい.

証明 (答案にはここだけ書けばいい)

そうとは限らない．なぜなら，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = A + B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ が反例

注意

もちろん，$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のとき，$C' = A' + B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ は反対称行列である．しかし，この主張は,「条件を満たすすべての A,B に対して」ということなので，だめな $A, B, C = A + B$ の例を 1 個挙げれば主張を否定できる.

ここまで来たよ

15 証明 連立 1 次方程式と行列 | 第 2 章 連立 1 次方程式

16 行列の基本変形| 第 2 章 連立 1 次方程式

- 2. 行列の行基本変形

◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations))

(i), (j) は拡大係数行列の行番号. ①, ②, ...

$$
\begin{aligned}
&\text{(R1)} \quad (i) \leftrightarrow (j),\ i \neq j \\
&\text{(R2)} \quad (i) \times (\text{定数}c),\ c \neq 0 \\
&\text{(R3)} \quad (j) \times (\text{定数}a) + (i),\ i \neq j
\end{aligned}
$$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

行基本操作の可逆性

加藤 線形代数 p.49

行基本操作は, 別の行基本操作 (逆操作) で元に戻せる. だから連立 1 次方程式の変形としては同値.

(R1) $i \leftrightarrow j$, $i \neq j$ の逆操作は⋯
(R2) $i \times$ (定数c), $c \neq 0$ の逆操作は⋯
(R3) $j \times$ (定数a) $+$ i, $i \neq j$ の逆操作は⋯

L16-Q1

Quiz(行基本変形による連立 1 次方程式の解法)

1. 連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 19 \\ 3x_1 + x_2 &= 24 \\ 2x_1 &= 14 \end{aligned}$$

を行列で書いたときの拡大係数行列 $\tilde{A}$ を右側に並べて書こう.

2. 1 回の変形では R1, R2, R3 のいずれかを 1 個だけ使い (① $\times(-3)+$ ③ のような 記号を記すこと), 最終的に $\begin{array}{l} x_1= \text{数}, \\ x_2= \text{数}, \\ x_3= \text{数} \end{array}$ になるように連立 1 次方程式と行列を変形していこう.

(本来（や次々回 Trial）は行列を [::] → [::] → [::] → . . . のように横につなぐが，この問は，スライドのサイズの都合上，縦方向に書く)

加藤 線形代数 p.46 | 加藤 線形代数 練習 3(p.47)

(行) 階段形 (ref=row echelon form)

定義 ((行) 階段形 (row echelon form) 加藤 線形代数 定義 2-1(p.50))

m 行 n 列の行列 $A = [a_{ij}]$ が階段形であることの定義は 加藤 線形代数 p.51) を参照

加藤 線形代数 図 1(p.50)

階段形の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

r と c_i は？

加藤 線形代数 例 1(p.50) ,aE, O

加藤 線形代数 練習 2(p.52) mobius K2.2.30

階段形でない例 加藤 線形代数 注意 (p.51)

3 のところが縦 2 段になってるのがだめ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

定義 (階段形のいろいろな量 加藤 線形代数 p.51)

m 行 n 列の行列 A に対して,

- 階数 (rank) $r = \mathrm{rank} A$「段の個数」ただし $0 \leq r \leq m$.
- 主番号 $c_1, c_2, \ldots, c_r$「i 段の横方向位置 (列番号)」ただし $1 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_r \leq n$
- 主列 第 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 列
- 主成分 (ピボット (pivot)) a_{ic_i} $(i = 1, \ldots, r)$「階段の角」

mobius K2.2.30

そうである例 加藤 線形代数 例 1(p.50) ,aE, O

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ (行) 簡約階段形 (rref=reduced row echelon form)

定義 ((行) 簡約階段形 加藤 線形代数 定義 2-2(p.52))

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ が簡約階段形
$\Leftrightarrow$

- E1 A か階段形
- E2 主成分がすべて 1, すなわち，$a_{ic_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, r)$.
- E3 各主列における主成分より上の成分もすべて 0, すなわち，$a_{kc_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, r, k < i)$.

簡約階段形の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 例 2(p.53) ,E, O

r と c_i は？

加藤 線形代数 練習 4(p.53) mobius K2.2.30

階段形だが簡約階段形でない例

加藤 線形代数 例 1(p.50), $aE(a \neq 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

定理 (行基本変形定理)

任意の行列 A は, 適当な行基本変形によって, 簡約階段形に変形できる.
変形後の行列 (A の簡約階段化) はただ一つに定まる加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
一意性の証明 教科書でも省略 (サポートサイトにあるそう)
存在の証明 入力:A, 出力:A の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き)加藤 線形代数 p.53–57を与えることによる.
このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要. 説明延期.