掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L17(2024-06-07 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-06 Thu 20:10 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 pp.54-59 掃き出し法で任意の行列を簡約階段形に基本変形して階数を求められる
- 加藤 線形代数 例題 1(p.62) 拡大係数行列を簡約階段形にして, 連立 1 次方程式が解ける

L16-Q1

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 19 \\ 3 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$
2. 行列のみ．
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 19 \\ 3 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 14 \\ 3 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 1 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 1 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times(-3)+②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times(-2)+③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$
これは次の連立方程式を表す拡大係数行列．

$$\begin{aligned} x_1 &=7, \\ x_2 &=3, \\ x_3 &=5. \end{aligned}$$

教科書で言う「階段形の行列」,「簡約階段形の行列」を，
世の中では「階段行列」,「簡約階段行列」＝「簡約行列」と言うことがあります．この授業でも，口頭，および問題の一部でそうなってしまっている部分があります．

L17-Q1

Quiz(拡大係数行列から 1 次方程式)

拡大係数行列が $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, 未知数が x_i $(i = 1, 2, \dots)$ である連立 1 次方程式を，行列やベクトルを使わずに，スカラーに対する複数の式として書こう.

ここまで来たよ

16 行基本操作| 第 2 章 連立 1 次方程式

17 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 3. 連立 1 次方程式とその解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations))

i, j は拡大係数行列の行番号. ①,②, . . .

(R1) $i \leftrightarrow j$, $i \neq j$
(R2) $i \times (\text{定数}c)$, $c \neq 0$
(R3) $j \times (\text{定数}a) + i$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

$j \times (\text{定数}a) + i$ の表示は，通常の多項式でなく，順序に意味がある．
元の行 ×(定数)+ 足される行.
多項式で順序がなくて ②+③ って書いていいなら，どっちをどっちに加えたかわからないじゃん.

◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

定理 (行基本変形定理の言い換え)

任意の行列 A には簡約階段化 (適当な行基本変形によって A から到達できる簡約階段形の行列) が存在する.
任意の行列 A に対してその簡約階段化は一意である (ただ一つに定まる) 加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
一意性の証明 教科書でも省略 (サポートサイトにあるそう)
存在の証明 入力:A, 出力:A の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き) 加藤 線形代数 p.53–57 を与えることによる
このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要.

掃き出し法の概要 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ

(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていってピボットにする

(3) 持っていった非零成分 c を R2 $①\times(1/c)$ で 1 にする

(4) R3 $① \times (-a) + ⓘ$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の a を零にする

(10) R3 $① \times (-a) + ⓘ$ で, ブロックのその列の上側を零にする

(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う

(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

Web アプリで

https://learn.hig3.net > 行基本変形計算機

https://bit.ly/redmatrix

https://learn.hig3.net > 動画 簡約階段化

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

◆行列の階数 (rank)

定義 (行列の階数 加藤 線形代数 定義 2-3(p.58))

行列 A の簡約階段化の階数を, A の階数 (rank) といい $\mathrm{rank}A$ と書く.

加藤 線形代数 練習 8,9(p.59) mobius 2.2.40

定理 (階数の性質)

$m \times n$ 行列 A について, 次の不等式が成り立つ.

$\mathrm{rank}A \leq m, \mathrm{rank}A \leq n.$

ここまで来たよ

16 行基本操作| 第 2 章 連立 1 次方程式

17 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 3. 連立 1 次方程式とその解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

◆行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.60)

定理 (行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 定理 3-1(p.60))

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ から, 行基本変形によって, $[B|\boldsymbol{b}']$ が得られるとき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ は同値.

どうせなら, 簡約階段形の $[B|\boldsymbol{b}']$ で解いた方が楽.

証明

- 操作前の連立 1 次方程式が成立するとき, 各操作後の連立 1 次方程式は成立する.
- 行基本操作の可逆性 加藤 線形代数 p.49 から, 操作後から操作前の連立 1 次方程式にも戻せる.