3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L18(2024-06-12 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-11 Tue 17:32 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.65 拡大係数行列の簡約階段化から，解の有無，解の自由度をも求められる．
- 加藤 線形代数 例題 1(p.62) 拡大係数行列の簡約階段化から，連立 1 次方程式の解を求めて, 2 種類の形で表せる

L17-Q1
Quiz 解答: 拡大係数行列から 1 次方程式

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\
x_1 \qquad\quad + x_3 &= 5 \\
4x_2 - 3x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

簡約階段形への基本変形の過程

- `https://learn.hig3.net` 動画 簡約階段化
- 加藤 線形代数 p.57 例題 1 の解答
- Teams に貼ったスクリーンショット

ここまで来たよ

◆行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.60)

定理 (行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 定理 3-1(p.60))

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ から, 行基本変形によって, $[B|\boldsymbol{b}']$ が得られるとき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ は同値.

どうせなら, 簡約階段形の $[B|\boldsymbol{b}']$ で解いた方が楽.

証明

- 操作前の連立 1 次方程式が成立するとき, 各操作後の連立 1 次方程式は成立する.
- 行基本操作の可逆性 加藤 線形代数 p.49 から, 操作後から操作前の連立 1 次方程式にも戻せる.

例 拡大係数行列の簡約化が次のように得られたとする.

$$\tilde{B} = [B|\boldsymbol{b}'] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は,

$$\begin{array}{rrrrrrcr} 0x_1+ & x_2+ & & 2x_4+ & & 4x_6 & = & b_1 \\ & & x_3+ & 3x_4+ & & 5x_6 & = & b_2 \\ & & & & x_5+ & 6x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

主成分 (ピボット) に対応する x_2, x_3, x_5 は，左辺の 1 個所にしか現れない（しかも係数 1 で）から，これらについて解くのは簡単．

$$
\begin{aligned}
x_2 &= b_1 - 2x_4 - 4x_6 \\
x_3 &= b_2 - 3x_4 - 5x_6 \\
x_5 &= b_3 - 6x_6
\end{aligned}
$$

(他にも書くべきことあり)

主成分（ピボット）に対応しない x_1, x_4, x_6 は任意だが，求めるべき量なので，右辺に現れるのを放っておくわけにはいかない．同等に扱うため，任意の実数 c, d, e を使って，$x_1 = c$, $c \in \mathbb{R}$ 任意，のように書く．

解の答え方 1（解があるとき）

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c \\
x_2 &= b_1 - 2d - 4e \\
x_3 &= b_2 - 3d - 5e \\
x_4 &= d \\
x_5 &= b_3 - 6e \\
x_6 &= e \quad (c, d, e \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

解の答え方 2（解があるとき）ベクトルの形でも書ける．

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c, d, e \in \mathbb{R})
$$

(解が存在する場合の) 連立 1 次方程式の解き方

簡約階段形の拡大係数行列を持つ連立 1 次方程式の解き方 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

1. ピボットのない列 ($\mathbf{0}, *$ になっている列) にかかる未知数を，任意定数 (パラメタ) $c, d, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく．任意定数の個数を解の自由度 (degree of freedom) という．
2. ピボットに対応する未知数は，これらの任意定数の 1 次式で書ける（その行の式を解いて）．

例 加藤 線形代数 例題 1(p.62) 加藤 線形代数 練習 2(p.54)，章末問題 2(p.72) mobius K2.3.10

`https://learn.hig3.net` $>$ 動画 連立 1 次方程式

L18-Q1

Quiz(拡大係数行列から連立 1 次方程式の解)

変数 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix}$ に関する連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $\tilde{A} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ，次のようになった．

$$\tilde{A} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と同値な連立 1 次方程式を，行列を使わずに書こう．
2. 任意定数 $c, d, e, \dots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \quad\vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう．
3. 任意定数 $c, d, e, \dots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 c + \boldsymbol{v}_2 d + \dots$ の形に書こう．

ここまで来たよ

17 掃き出し法 | 2 行列の基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

18 3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式

- ◆行基本変形と連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解
- ◆解の存在|3. 連立 1 次方程式とその解

例 拡大係数行列の階段化が次のように得られたとする．

$$\tilde{B} = [B|\boldsymbol{b}'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix}$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする．

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は，

$$\begin{aligned} 0x_1 + \quad x_2 + \qquad\qquad 2x_4 + \qquad\qquad 4x_6 &= b_1 \\ x_3 + \quad 3x_4 + \qquad\qquad 5x_6 &= b_2 \\ x_5 + \quad 6x_6 &= b_3 \\ 0 &= b_4 \end{aligned}$$

解の存在/非存在は，成分 b_4 が 0 かどうかで決まる．拡大係数行列の最終列=定数ベクトルの部分に段があるかないか？

解の存在/非存在は，成分 b_4 が 0 かどうかで決まる．拡大係数行列の最終列=定数ベクトルの部分に段があるかないか？

段がある $b_4 \neq 0$ $(3 = \mathrm{rank} A < \mathrm{rank} \tilde{A} = 4)$
解なし．

段がない $b_4 = 0$ $(\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} \tilde{A} = 3)$
解が存在する（上で求めた）．

定理 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65))

A を $m \times n$ 行列とする.
n 変数の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$ とする.

1. (*) が解を持たない $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\, A < \mathrm{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.
2. (*) が解を持つ $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}[A|\boldsymbol{b}]$. (†)
   - (†) が成り立つとき, (*) の解の自由度は $n - \mathrm{rank}\, A$.

(†) が成り立つとき, 解の自由度が 0 なら解は一意に定まる, 正なら無限個の解が存在する.

加藤 線形代数 例題 3(p.68), 加藤 線形代数 練習 4(p.69) mobius K2.3.30

系 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度 加藤 線形代数 系 3-1(p.67))

A を $m \times n$ 行列とする.
$m = \operatorname{rank} A$ ならば
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持ち, 解の自由度は $n - m$.

話し言葉「フルランク」$\Leftrightarrow m = \operatorname{rank} A$
話し言葉「ランク落ち」$\Leftrightarrow m > \operatorname{rank} A$
「フルランクのとき, (変数の個数 n)−(方程式の数 m) で決まる」
「系 Corollary」とは，重要かもしれないけど定理から簡単に導ける命題のこと

L18-Q2

Quiz(拡大係数行列の簡約階段形から解の有無と解の自由度)

次の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$ を持つ連立 1 次方程式は解を持つか？ 解を持つなら解の自由度，解が一意的であるかどうかを答えよう．

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$