3.1 基本行列と基本変形 | 第 3 章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L19(2024-06-14 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-14 Fri 11:10 JST hig"

今日の目標

- (非) 同次 2(3) 元連立 1 次方程式の解全体の集合が空集合，点，直線，平面 (，空間) になることを説明できる
- 加藤 線形代数 §2.3 同次連立 1 次方程式の解が説明できる
- 加藤 線形代数 §3.1 行/列基本操作と, 基本行列を左/右からかけることとの対応を説明できる

L18-Q1

Quiz 解答: 拡大係数行列から連立 1 次方程式の解

1.

$$\begin{array}{rrrrrl} x_2 & +2x_3 & & +3x_5 & +5x_6 & = 7, \\ & & x_4 & +4x_5 & +6x_6 & = 8, \\ & & & & 0 & = a, \\ & & & & 0 & = 0. \end{array}$$

2. $a \neq 0$ のとき解なし.
$a = 0$ のとき, $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c, \\
x_2 &= 7 - 2d - 3e - 5f, \\
x_3 &= d, \\
x_4 &= 8 - 4e - 6f, \\
x_5 &= e, \\
x_6 &= f.
\end{aligned}
$$

3. $a \neq 0$ のとき解なし.
$a = 0$ のとき, $c, d, e, f \in \mathbb{R}$ を任意定数として,

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

L18-Q2

Quiz 解答: 拡大係数行列の簡約階段形から解の有無と解の自由度

$\tilde{A} = [A\|\boldsymbol{b}]$	A の行の個数 m	A の列の個数 n	rank$A$	rank$\tilde{A}$	解あり rank$A$=rank$\tilde{A}$	解の自由度 $n -$ rank$A$	解が一意 $n -$ rank$A = 0$
$\begin{bmatrix} 0&1&2&0&4 \\ 0&0&0&1&3 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	5	4	2	3	No	—	—
$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&2 \\ 0&1&0&0&3 \\ 0&0&1&0&4 \\ 0&0&0&1&5 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	5	4	4	4	Yes	0	Yes
$\begin{bmatrix} 1&3&0&0&1&4 \\ 0&0&1&0&2&3 \\ 0&0&0&1&3&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	4	5	3	3	Yes	2	No
$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&4&2 \\ 0&1&0&0&3&3 \\ 0&0&1&0&2&4 \\ 0&0&0&1&1&5 \end{bmatrix}$	4	5	4	4	Yes	1	No

2 元連立 1 次方程式の解の集合（平面内の）

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ (平面上の点)

定義 (連立 1 次方程式の解全体の集合 加藤 線形代数 p.146**)**

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を考える.
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解全体の集合とは,
$\{\boldsymbol{x} |\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \subset \mathbb{R}^n$.

以下, 任意定数 $c, d \in \mathbb{R}$.
例 1

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 2, 解の自由度 0, 解は一意的, 解全体の集合は 1 点

例 2 加藤 線形代数 p.183 線形代数☆演習 I(2024)L06 teamL06

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 1, 解の自由度は 1, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 直線

例 3 加藤 線形代数 p.184

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

階数は 0, 解の自由度は 2, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は平面全体

例 4

拡大係数行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A の階数はたまたま 1, 解の自由度は定義されない，解なし，解全体の集合は空集合

3 元連立 1 次方程式の解の集合（空間内の）

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (空間内の点) 線形代数☆演習 I(2024)L06 teamL06

階数は 3, 自由度 0, 解は一意に定まる, 解全体の集合は 1 点,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 11 \end{aligned} \rightsquigarrow 1\text{ 点}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

階数は 2, 自由度 1, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 直線. 加藤 線形代数 p.183

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - 7c \\ x_2 &= 3 - 9c \\ x_3 &= c \end{aligned} \rightsquigarrow 1\text{ 直線}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

階数は 1, 自由度 2, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 平面. 加藤 線形代数 p.184

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - 5c - 3d \\ x_2 &= c \\ x_3 &= d \end{aligned} \rightsquigarrow \text{平面}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

階数は 0, 自由度 3, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は空間全体.

$$\tilde{A} = O$$

ここまで来たよ

18 2.3 連立 1 次方程式の解 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- ◆同次連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解

19 3.1 基本行列と基本変形 | 第 3 章 行列の構造
- ◆基本行列|1. 基本行列と基本変形

◆同次連立 1 次方程式

定義 (同次連立 1 次方程式)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が

1. 同次連立 1 次方程式 ⇔ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
2. 非同次連立 1 次方程式 ⇔ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

同次=斉次=homogeneous(等質)=次数が同じ (今の場合, 各項が 1 次)

命題

同次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つ

証明: 同次連立 1 次方程式では $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$. 実際, $A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.
同次連立 1 次方程式の解の集合の直線や平面は原点を通る.

定義 (非自明な解)

同次方程式の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

同次連立 1 次方程式の解空間

定理 (同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69))

A を $m \times n$ 行列とする.
n 変数の同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (**) は

1. $n - \operatorname{rank} A = 0 \Rightarrow$ (**) の解は一意（自明な解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみ）.
2. $n - \operatorname{rank} A > 0 \Rightarrow$ (**) の解は一意でない（非自明な解を持つ）

$n - \operatorname{rank} A$ を解の自由度という.

加藤 線形代数 例題 4, 練習 5(p.70), 章末問題 3(p.72) mobius K2.3.50 mobius K2.3.70

	$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \tilde{A}$	$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}$				
		自由度 $n - \operatorname{rank} A = 0$	1	2	3	$\cdots$
非同次 $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$	解なし (空集合)	一意的 点	直線	平面		
同次 $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$	起きないケース	一意的, 自明な解 $\mathbf{0}$ のみ 原点	$\mathbf{0}$ を通る直線	$\mathbf{0}$ を通る平面		

L18-Q3

Quiz(連立 1 次方程式の解全体の集合)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

とする．

1. 非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は解をもつか？ あるなら解の自由度を求めよう．解全体の集合を求め，$V = \mathbb{R}^2$ に描こう．
2. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ は非自明な解をもつか？ 解の自由度を求めよう．同次の解全体の集合を求め，$V = \mathbb{R}^2$ に描こう．

L18-Q4

Quiz(連立 1 次方程式の解全体の集合)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

とする.

1. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ は非自明な解をもつか? 解の自由度を求めよう. 解空間を求めよう.
2. 非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 26 \\ 52 \\ 84 \end{bmatrix}$ は解をもつか? もつなら解の自由度を求めよう. 解全体の集合を求め $V = \mathbb{R}^3$ に描こう(Hint: 各平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ との共有点を求めよう). 同次の解全体の集合もあわせて描こう.

ここまで来たよ

◆基本行列 加藤 線形代数 p.75

$P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ はいずれも, 単位行列をちょっと変更した m 次正方行列.

P_{ij}, P_i の i, j は基本行列の番号. $P_{ij} = [a_{k\ell}]$ の k, ℓ は行番号列番号.

P_{ij} $(i \neq j)$

例: 3 次の $P_{12} = P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_{ij} = [a_{k\ell}]$ とすると,

$$a_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 - \delta_{ik} - \delta_{j\ell}) + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}.$$

$P_{ij} = P_{ji}$

$P_i(c)$

例: 3 次の $P_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_i(c) = [b_{k\ell}]$ とすると,

$$b_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 \cdot (1 - \delta_{ik}) + c \cdot \delta_{ik})$$

$P_{ij}(a)\ (i \neq j)$

例: 3 次の $P_{23}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{31}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

「2 行 3 列に 5, 3 行 1 列に 5」

$P_{ij}(a) = [c_{k\ell}]$ とすると,

$$c_{k\ell} = \delta_{k\ell} + a\delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

$P_{ij}(a) \neq P_{ji}(a)$

◆基本行列と行基本変形 加藤 線形代数 p.76

命題 (行基本操作 ↔ 基本行列の左からの積)

$m \times n$ 行列 A の行基本操作は，m 次の基本行列を左からかけるのと同じ

(R1) P_{ij} を左からかける　$i \leftrightarrow j$, $i \neq j$
(R2) $P_i(c)$ を左からかける　$i \times$ (定数c), $c \neq 0$
(R3) $P_{ij}(a)$ を左からかける　$j \times$ (定数a) $+ i$

加藤 線形代数 練習 2(p.77)

行基本変形 加藤 線形代数 p.48 線形代数☆演習 I(2024)L16 基本行列の積を左からかけるのと同じ
積の順序に大注意
「まず (R1), つぎに (R3)」は $P_{23}(a)(P_{12}A)$ なので, 行列の積
$Q = P_{23}(5)P_{12}$.

加藤 線形代数 例 1, 練習 3(p.77)

例

$$P_{12}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix} = \qquad\qquad \begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix}$$

例

$$P_{23}(5)\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix} = \qquad\qquad \begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{bmatrix}$$

L19-Q1

Quiz(基本行列)

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ を考える.

1. A を行基本変形で簡約階段形にしよう.
2. 上で求めた行基本変形に現れた基本操作それぞれに対応する基本行列 $Q_1, Q_2, \ldots$ を，記号と成分で書こう (Q_1 が最後の基本操作に対応する).
3. 上で求めた基本行列の積を考え，基本変形に対応する行列 Q を成分で求めよう.
4. QA が簡約階段形であることを確かめよう.