

3.2 正則行列 | 第3章 行列の構造

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L20(2024-06-19 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-19 Wed 11:23 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §3.2 定理 2.2 正則行列の判定条件を適用できる
- 背理法による証明ができる



L19-Q1

Quiz 解答: 連立 1 次方程式の解全体の集合

 $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ で考える.

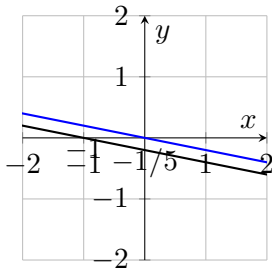
$$\textcircled{1} \text{ 拡大係数行列 } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \times \frac{1}{2}, \textcircled{1} \times (+1) + \textcircled{2}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = 1$ より解をもつ. 解の自由度は $n - \text{rank } A = 1$.

解は $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t$ ($t \in \mathbb{R}$). 解全体の集合は $\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t \mid t \in \mathbb{R}\}$. (原点を通らない直線)

直線と y 軸 $x = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$, 直線と x 軸 $y = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

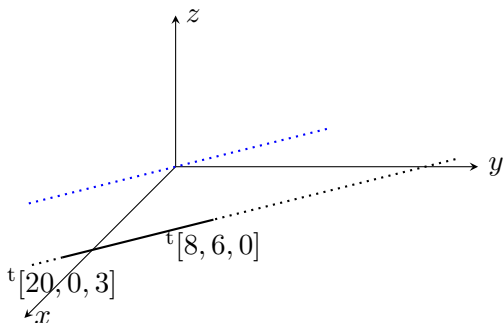
- ② $\text{rank } A = 1$, 解の自由度 $n - \text{rank } A = 1$ より非自明な解をもつ. 解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t$ ($t \in \mathbb{R}$). 解空間は $\{\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} t | t \in \mathbb{R}\}$. (原点を通る直線)



L19-Q2

Quiz 解答: 連立 1 次方程式の解全体の集合

- ① $A \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\text{rank } A = 2$. 変数の個数は $n = 3$ より解の自由度は $n - \text{rank } A = 3 - 2 = 1 > 0$ なので非自明な解をもつ. 解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$ ($t \in \mathbb{R}$). 解空間は原点を通る直線 $W = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.
- ② 拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 26 \\ 2 & 6 & 4 & 52 \\ 3 & 10 & 8 & 84 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\text{rank } \tilde{A} = 2$. $\text{rank } \tilde{A} = \text{rank } A$ より解をもつ. 解の自由度は $n - \text{rank } A = 3 - 2 = 1$. 解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$ ($t \in \mathbb{R}$).
 解全体の集合は直線 $W_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.
 W_0 と $x = 0$ との交点は, $t = -2$ より $\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$, 同様に $y = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $z = 0$ との交点は $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.
 同次連立 1 次方程式の解空間 W は, この直線 W_0 と平行で原点を通る直線.



L19-Q3

Quiz 解答: 基本行列

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times 2 + \textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

- $\textcircled{2}$ A が 3×2 行列なので、3 次の基本行列を使う。
 $[Q_i]$ の i の命名方法は教科書にしたがった。

- ▶ ① \leftrightarrow ③: $Q_3 = P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ▶ ② $\times \frac{1}{3}$: $Q_2 = P_2(\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- ▶ ② $\times 2 +$ ①: $Q_1 = P_{12}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

③ 3 次の正方行列の積を計算して, $Q = Q_1 Q_2 Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

④ 行列の積を計算して $QA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($= B$).

復習: 正則行列

線形代数☆演習 I(2024)L12

定義 (正則行列と逆行列) 加藤 線形代数 定義 3-2(p.32)

n 次正方行列 A に対して, $XA = AX = E$ となる n 次行列が存在するとき, A を**正則行列 (non-singular matrix)** といい, X は A の**逆行列 (inverse matrix)** であるといい $X = A^{-1}$ とかく.

$n = 2$ の $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $\Delta = ad - bc \neq 0$ のとき正則で $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ だった.

定理 (正則行列の性質) 加藤 線形代数 定理 3-2(p.33)

積 A, B が正則行列 ならば, AB も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

逆 A が正則行列 ならば, A^{-1} も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.

転置 A が正則行列 ならば, tA も正則行列で, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

◆基本行列の正則性

定理 (基本行列の正則性 加藤 線形代数 定理 2-1(p.84))

- n 次の基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n. i \neq j, c \neq 0$) はすべて正則行列.
- 逆行列は次の通り.
 - ▶ $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.
 - ▶ $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$.
 - ▶ $P_{ij}(a)^{-1} = P_{ij}(-a)$.

「基本行列の逆行列はまた基本行列」

基本行列の正則性の証明

加藤 線形代数 p.84

下心 基本操作は可逆だから、逆操作の行列が逆行列になってるはず.

加藤 線形代数 練習 1(p.85)

定理 (行基本変形定理 (その 2)) 加藤 線形代数 定理 1-1(p.77)

任意の $m \times n$ 行列 A に対して, $B = Q_1 Q_2 \cdots Q_s A$ が簡約階段形の行列となるような m 次の基本行列 Q_1, \dots, Q_s が存在する.

これは行基本変形定理 加藤 線形代数 定理 2-1(p.53) の言い換え

証明 最初の基本操作に対応する行列が Q_s, \dots , 最後の基本操作に対応する行列が Q_1 .

系 (加藤 線形代数 定理 1-1(p.77) 定理 1-2(p.81)) の系)

任意の $m \times n$ 行列 A について,

- QA が **簡約階段行列** となる m 次正則行列 Q が存在する.

一意ではない

証明 行基本変形定理の証明で, $Q = Q_1 \cdots Q_s$ とすると, Q は正則行列の積なので, やはり正則行列.

「任意の行列は左から適当な正則行列をかけて簡約階段行列にできる」

◆正則行列の構造

定理 (正則行列の構造 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85))

n 次正方行列について次の 4 つの条件は同値.

- (a) A は正則行列
- (b) $\text{rank } A = n$ 'フルランク', 簡約階段形が単位行列
- (c) A は有限個の基本行列の積に等しい
- (d) 待て 加藤 線形代数 4 章 $\det A \neq 0$

mobius K3.2.50

実用的には、いつでも階段行列に基本変形して (b) で判定できる「正則行列でない」の便利な十分条件: 次の補助定理, その系.

証明

補助定理 加藤 線形代数 例題 1, 練習 2, 練習 3(p.86) を準備した上で,

(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a) を示す.

(a) \Rightarrow (b) 部分は, 対偶 (contraposition) 「((b) でない) \Rightarrow ((a) でない)」を示す.

補助定理

命題 (加藤 線形代数 例題 1(p.86))

n 次正方行列 A について, n 行目が $\mathbf{0}$ ならば A は正則でない.

証明

系 (加藤 線形代数 (p.86))

n 次正方行列 A について,

- 1 加藤 線形代数 例題 1(p.86) n 行目が $\mathbf{0}$ ならば A は正則でない.
- 0 加藤 線形代数 練習 2 i 行目が $\mathbf{0}$ ならば A は正則でない
- ① 加藤 線形代数 練習 3 i 行目と j 行目 ($i \neq j$) が一致するならば A は正則でない
- ② i 行目が, j 行目 ($i \neq j$) の c 倍ならば A は正則でない
- ③ j 行目の a 倍を, i 行目に加えたものが, k 行目 ($k \neq i$) に等しいならば A は正則でない

一般に n 次正方行列で A, B : 正則, S, T : 非正則とすると, AB は正則, AS, SA, ST は非正則)

証明の例

背理法 proof by contradiction

p, q : 命題.

$p \Rightarrow q$ を示そうとするときに,

「 q 」よりも「 q でない」のほうが簡単で、(条件として)使いやすいとき、
に背理法がよく使われる

特に、「 q 」自身が「(有名な概念)でない」のとき、「 q でない」は「(有名な概念)」

背理法

- q でない, とする
- p とする.
- \vdots
- 過程
- \vdots
- 矛盾
- q である.

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (b) でない \Rightarrow (a) でない

「(b) でない」すなわち $\text{rank } A \neq n$ とする.

すなわち $\text{rank } A < n$ とする.

正則な P で簡約階段形 PA にする. PA の n 行目は $\mathbf{0}$. 補助定理

加藤 線形代数 例題 1(p.86) より PA は正則でない.

(ここ **背理法**) A が正則とすると, 積 PA も正則. 矛盾. よって, A は正則でない.

A は正則でない. すなわち, 「(a) でない」

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (b) \Rightarrow (c)

(b) $\text{rank } A = n$ とする

ある正則な $P = Q_1 \cdots Q_s$ で簡約階段化したとき, $PA = E$.

$$A = P^{-1} = (Q_1 \cdots Q_s)^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$$

これらはすべて基本行列 加藤 線形代数 定理 2-1(p.84).

よって基本行列の積で書ける (c)

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (c) \Rightarrow (a)

(c) A が有限個の基本行列の積で書けるとする.
基本行列は正則行列.
正則行列の積はまた正則行列.
よって A は正則行列 (a)

お知らせ

- trialL20 はレポート的. 2024-06-21 金朝には trial はない.
 - ▶ 授業時間外に Mobius の 線形代数 > Trial > Trial L20 で個人別 2 問を取得し, この紙の表に簡約階段化, 裏に連立 1 次方程式の答案を手書きで作成し, (授業中でなく) 次のいずれかの日時場所で提出してください.
 - ★ 2024-06-21 金 3, 28 金 3. 1-609 数理情報基礎演習 A TA (相談可)
 - ★ 2024-06-25 火 3. 1 - 507 オフィスアワー 樋口 (相談可)
 - ★ 2024-06-24 月-28 金 12:40-13:25. 1-536,1-538 Math ラウンジ チューター (どちらかの部屋に在室, 相談可)
- (短い) レポート 1 学期途中の振り返り Moodle
<https://learn.hig3.net>