3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L21(2024-06-21 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-20 Thu 17:22 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 p.89 行基本変形を用いて正則か判定し逆行列を求められる
- 係数行列が正則なとき，逆行列を求めて連立 1 次方程式を解ける

ここまで来たよ

◆逆行列と基本変形 加藤 線形代数 p,.88

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) より

任意の n 次正則行列 A は, n 次基本行列のある積として次のように書ける…「E に $Q_s, \ldots, Q_1$ の順に基本操作を適用すると A」

$$A = Q_1 \cdots Q_s E. \qquad (*)$$

(*) に，左から $Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \ldots, Q_s^{-1}$ の順にかけると次のようになる.

$$Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} A = E. \qquad (**)$$

A に $Q_1^{-1}, \ldots, Q_s^{-1}$ の順に基本操作 (逆操作) を適用すると E

(*) の，両辺の逆行列をとると次のようになる

$$A^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} E. \qquad (***)$$

E に $Q_1^{-1}, \ldots, Q_s^{-1}$ の順に基本操作 (逆操作) を適用すると A^{-1}

$Q = Q_1 \cdots Q_s, Q^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$ とおく.

$$E \xrightarrow{Q} A \quad (*)$$

$\updownarrow$逆変形

$$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$$

$$A \xrightarrow{Q^{-1}} E \quad (**)$$

$\updownarrow$同じ行基本変形

$$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$$

逆行列を作る行基本変形 加藤 線形代数 p.89

任意の正則行列 A について,
A に施して E を作る (簡約階段形にする) 行基本変形 Q^{-1} を
E に施すと,
A^{-1} が作られる.

https://bit.ly/redmatrix

ここまで来たよ

◆逆行列の求め方 加藤 線形代数 p.89

逆行列を求める筆算

n 次の正方行列 A が与えられたとき, $n \times (2n)$ 行列 $[A|E]$ を考え, **行**基本変形で (掃き出し法で) 簡約階段形にする.

$$[A|E] \to \cdots \to [E|B]$$

となったなら, A は正則で, B が求める逆行列 $B = A^{-1}$.

加藤 線形代数 例題 1(p.92)

「A が正則であるかどうか調べ, 正則であればその逆行列を求めよ」

「逆行列の求め方」で, $[A|E]$ を簡約階段形に基本変形する. $[E|B]$ に到達したなら逆行列 $B = A^{-1}$ が得られる. $[E|B]$ に到達しないなら ($\operatorname{rank} A < n$ なら), 正則でない. 副産物として $\operatorname{rank} A$ が求まる.

`https://learn.hig3.net/` 動画 逆行列

mobius K3.3.10 加藤 線形代数 練習 3(p.92), 章末問題 4(p.94)

Quiz(逆行列)

L21-Q1 次の行列は正則か？ 正則なら逆行列を答えよう．正則でないなら理由を書こう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quiz(逆行列)

L21-Q2 次の行列は正則か？ 正則なら逆行列を答えよう．正則でないなら理由を書こう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

正則か？ の判定

ベースは「正則行列の構造」 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)

行列 A が正則かどうかの，いつでも使える判定方法

- 正方行列 (n 行 n 列) であることが大前提.
- 階段形にして，階数 $\mathrm{rank}\,(A) = n$ なら正則，階数 $\mathrm{rank}\,(A) < n$(途中で見えちゃうこともある) なら正則でない.

たまたま判定できるケース

- $n = 2$ なら，$\Delta = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は正則.
- A にうまく行基本変形して，加藤 線形代数 例題 1，練習 2，練習 3(p.86) の形に持って行けるなら正則でない
- $XA = AX = E$ となる X が見つかれば正則（もともとの定義）
- 加藤 線形代数 §4 になると，行列式 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$は正則 で便利に判定できる

復習: 掃き出し法

線形代数☆演習 I(2024)L17 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ

(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていってピボットにする

(3) 持っていった非零成分 c を R2 $①\times(1/c)$ で 1 にする

(4) R3 $①\times(-a)+ⓘ$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の a を零にする

(10) R3 $①\times(-a)+ⓘ$ で, ブロックのその列の上側を零にする

(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う

(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

ここまで来たよ

逆行列と連立 1 次方程式

命題 (逆行列を利用した連立 1 次方程式の解)

連立 1 次方程式が，係数行列 A が n 次正則行列，定数項ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, 未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ で，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と書かれるならば，

1. 連立 1 次方程式は解を持ち，解の自由度は 0，解は一意．
2. 解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ である．

命題の長所短所

- ♠ 一般の場合 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65) よりも限られた状況 (未知数 n 個=式の個数 n 個，A が正則) 仮定が強い
- ♡ 結論として具体的な解 $A^{-1}\boldsymbol{b}$ の情報が得られている
- ♡ $\boldsymbol{b}$ が変わっても同じ A^{-1} で解が書ける
  - 「$[A|E]$ を簡約階段形にする」，は，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_n$ を一度に解いているようなものだから，すべての $\boldsymbol{b}$ に対する解をとらえている

命題の (略) 証明

1. 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65) で，$m=n$. A が正則なので，加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) より $\operatorname{rank} A = n = \operatorname{rank}\,[A|\boldsymbol{b}]$ なので．
2. 加藤 線形代数 定義 3-2(p.32) より 逆行列 A^{-1} が存在する．左から A,A^{-1} をかけることにより

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$$

L21-Q3

Quiz(逆行列と連立 1 次方程式)

正則行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ で書かれた次の連立 1 次方程式を解こう.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$
2. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$
3. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$

mobius　K3.3.50