4.1 置換 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L22(2024-06-26 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-26 Wed 07:35 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §4.1 置換を説明できる
- 加藤 線形代数 §4.1 置換の符号を, 差積, 転倒数の計算から求められる

Quiz 解答: 逆行列

$[A|E]$ は簡約階段形 $[E|A^{-1}]$ に基本変形 (省略) できて,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L21-Q1

$[A|E]$ は簡約階段形 $[E|A^{-1}]$ に基本変形 (省略) できて,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

L21-Q2

A を階段形に基本変形 (省略) すると, $\operatorname{rank} A <$ 次数 より正則でない.

階数 2

L21-Q3

Quiz 解答: 逆行列と連立 1 次方程式

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である.

1. $A^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-4\\5\\4\end{bmatrix}$.
2. $A^{-1}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-7\\11\\7\end{bmatrix}$.
3. $A^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}a+b-c\\ \frac{2}{3}a-b+c\\ -\frac{2}{3}a+b\end{bmatrix}$.

ここまで来たよ

◆置換

定義 (置換 加藤 線形代数 p.98)

有限集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上の変換 加藤 線形代数 pp.6,8,10,12,191– で, 1 対 1 加藤 線形代数 p.16, 上への写像 加藤 線形代数 p.15 になっているものを置換 (permutation) という.

加藤 線形代数 例 1(p.98) $X = \{1, \ldots, 5\}$ の置換 $\sigma : X \to X$.

$$\sigma(x) = \begin{cases} 3 & (x = 1) \\ 5 & (x = 2) \\ 2 & (x = 3) \\ 4 & (x = 4) \\ 1 & (x = 5) \end{cases}$$

別の書き方 $\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 5 \mapsto 1.$
この σ に対して $\sigma(2) = 5$.

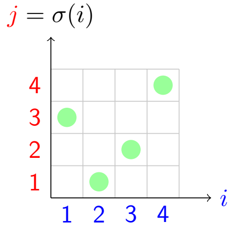
置換のグラフ

$n=4, X=\{1,2,3,4\}$.

例として X の置換 $\sigma(x)=\begin{cases} 3 & (x=1) \\ 1 & (x=2) \\ 2 & (x=3) \\ 4 & (x=4) \end{cases}$

左が $j=\sigma(i)$ の ‘グラフ’

- 変換であること: 各列に●が 1 個ある
- ‘1 対 1 かつ上への’ 変換であること: 各行に●が 1 個ある



問: 逆変換$=\sigma^{-1}$ のグラフは?

置換の略記方法

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&4&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}5&3&1&4&2\\1&2&3&4&5\end{smallmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ \sigma(1)&\sigma(2)&\sigma(3)&\sigma(4)&\sigma(5)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(角括弧は行列, 丸括弧は置換)

- これらの数は,「番目」でなく, その数 $\in X$ を表す.
  $X = \{A, B, C, D, E\}$ でも同じことができる.
- 1 対 1 の変換=全単射であることから, 上下の行には同じ数がちょうど 1 回ずつでてくる.
- 置換を 1 個決めるごとに, 下の行に順列 (例)35241 がでてくる, という気分の記号.
- $\{1, \ldots, n\}$ の置換は, n 個から n 個を取り出す順列の個数 ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.

ここまで来たよ

◆置換の合成

定義 (置換の合成 加藤 線形代数 p.99**)**

σ, τ: 置換.
合成変換 $\tau(\sigma(x)) = (\tau \circ \sigma)(x)$ のことを, 置換の合成 $\tau\sigma$ と書く.

x に近い σ が先に x にあたる $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ と同じのり.
ふつうの「積」のように見えるが, 写像の合成なので，行列同様 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.
略記 $\underbrace{\sigma \cdots \sigma}_{k} = \sigma^k$. $(k > 0)$

加藤 線形代数 例題 1(p.100), 練習 2(p.100)

L22-Q1

Quiz(置換の合成)

集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$$

を考える.

1. 元 $\sigma\tau(3), \tau\sigma(3)$ を 求めよう.
2. 置換 $\sigma\tau, \tau\sigma$ を 求めよう.
3. 元 $\tau^{-1}(3)$ を求めよう.
4. 置換 τ^{-1} を 求めよう.

◆単位置換と逆置換|1. 置換

定義 (単位置換 加藤 線形代数 p.101)

恒等変換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という.

任意の置換 σ に対して $\sigma e = e\sigma = \sigma$.

定義 (逆置換 加藤 線形代数 p.101)

σ の逆変換 $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を σ の逆置換という.

$(\tau\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\tau^{-1}$. (合成変換の逆変換の性質の反映) mobius K4.1.10

なんか行列の積に似てる…

「X の置換全体は X の対称群 (symmetric group) S_n という群 (group) をなす. n 次正則行列全体は群 GL(n) をなす」 代数入門 (3 年)

略記 $\underbrace{\sigma^{-1}\cdots\sigma^{-1}}_{k} = \sigma^{-k}$. $(k > 0)$. $\sigma^0 = e$.

ここまで来たよ

◆置換の符号

定義 (差積 加藤 線形代数 p.102)

n 変数 $(x_1, \ldots, x_n)$ の差積とは, 多項式

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

$n \times n$ 個のペア (i, j) のうち, $n(n-1)/2$ 個の積.

加藤 線形代数 例 4(p.103)

定義 (総積の記号)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Σ for Sum, Π(π の大文字) for Product.

例 $\prod_{k=1}^{n} k = n!, \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n n!.$

L22-Q2

Quiz(置換と添字)

関数変数 $\{x_i | i = 1, 2, 3\}$ の関数 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ を考える.
$\{1, 2, 3\}$ の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を考える.

1. $f(x_2, x_3, x_1)$ を求めよう.
2. $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ を求めよう.
3. $f(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, x_{\tau\sigma(3)})$ を求めよう.

定義 (置換の符号 加藤 線形代数 定義 1-1(p.103))

$\{1,\ldots,n\}$ の置換 σ について

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\frac{D(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})}{D(x_1,\cdots,x_n)}=\pm 1$$

を σ の符号 (signature) という.

ここで定義した符号 (signature) とは, 署名や指紋や血液型のような，σ を特徴で区別する量のこと．たまたま整数値 ± 1 をとる．‘正’，‘負’ のいずれかになるもの (符号，サイン (sign)) ではない.

加藤 線形代数 p.105

定義 (偶置換奇置換)

- 符号が $+1$ の置換を偶置換,
- 符号が -1 の置換を奇置換という.

ここまで来たよ

置換の符号の性質

定理 (置換の符号の合成公式 加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105))

置換 σ, τ, 単位置換 e に対して,

- $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma) \times \mathrm{sgn}(\tau)$ (*)
- $\mathrm{sgn}(e) = 1$.
- $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = (\mathrm{sgn}\,\sigma)^{-1} = \mathrm{sgn}\,\sigma$.

「sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」 代数入門

(*) の証明 符号の定義の分母をはらって,

$$D(x_{\tau(1)}, \ldots) = \mathrm{sgn}(\tau) \times D(x_1, \ldots) \qquad (**)$$

の両辺にはそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ が現れている. $x_1 = y_{\sigma(1)}, \ldots, x_n = y_{\sigma(n)}$ を代入する.

$$右辺 = \mathrm{sgn}(\tau) \times D(y_{\sigma(1)}, \ldots) \overset{(**)}{=} \mathrm{sgn}(\tau) \times \mathrm{sgn}(\sigma) D(y_1, \ldots)$$

$$左辺 = D(y_{\sigma(\tau(1))}, \ldots) = \mathrm{sgn}(\sigma\tau) \times D(y_1, \ldots)$$

置換の符号の別の特徴づけ

定義 (転倒数 加藤 線形代数 例題 3(p.104))

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 σ に対して,
X の要素の $n(n-1)/2$ 個のペア (i, j) $(i < j)$ のうち, $\sigma(i) > \sigma(j)$ であるものの個数を,
σ の**転倒数** という.

命題

$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sigma \text{ の転倒数}}$.

加藤 線形代数 練習 5(p.104) mobius K4.1.20, K4.1.30

例 $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
ペア $(2,3)$ は $\sigma(2) = 4 > \sigma(3) = 3$.
ペア $(2,4)$ は $\sigma(2) = 4 > \sigma(4) = 2$.

$$\begin{aligned}
D(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \\
&\qquad (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \\
&\qquad (x_3 - x_4). \\
D(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) &= (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(4)}) \\
&\qquad (x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)}) \\
&\qquad (x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}). \\
&= (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2) \\
&\qquad \color{red}{(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \\
&\qquad (x_2 - x_3).
\end{aligned}$$

◆偶置換と奇置換|1. 置換

定理 (加藤 線形代数 定理 1-2(p.106))

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換を考える $(n \geq 2)$.

- 置換全体は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.
- 偶置換は $n!/2$ 個ある.
- 奇置換は $n!/2$ 個ある.

証明 $\tau = (1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots \end{pmatrix}$ を固定する. $\tau^{-1} = \tau$. $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.
X の置換全体の集合 S_n の上の変換 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ を考えると, これは 1 対 1.

例 $n = 4$

σ	$\leftrightarrow (1\ 2)\sigma$
$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
⋮(計 12)	⋮(計 12)
偶置換	奇置換