4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L23(2024-06-28 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-06-28 Fri 11:23 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §4.1(pp.105,106) 巡回置換と互換を説明できる
- 加藤 線形代数 §4.2(p.107) 行列式の定義を説明でき，計算できる
- 加藤 線形代数 §4.2(p.110) 行列式の行多重線形性・行交代性を説明できる

L22-Q1
Quiz 解答: 置換の合成

1. $\sigma\tau(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(1) = 2 \in X$, $\tau\sigma(3) = \tau(\sigma(3)) = \tau(3) = 1 \in X$.
2. $\sigma\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right), \tau\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in S_4$.
3. $\tau^{-1}(3) = 2 \in X$.
4. $\tau^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in S_4$.

L22-Q2
Quiz 解答: 置換と添字

1. $f(x_2, x_3, x_1) = 2x_2 + 3x_3 + 5x_1$
2. $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = 2x_{\sigma(1)} + 3x_{\sigma(2)} + 5x_{\sigma(3)} = 2x_2 + 3x_1 + 5x_3$.
3. $\tau\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ より， $f(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, x_{\tau\sigma(3)}) =$
   $2x_{\tau\sigma(1)} + 3x_{\tau\sigma(2)} + 5x_{\tau\sigma(3)} = 2x_1 + 3x_3 + 5x_2$.

ここまで来たよ

置換の符号の性質

定理 (置換の符号の合成公式 加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105))

置換 σ, τ, 単位置換 e に対して,

- $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \times \operatorname{sgn}(\tau)$ (*)
- $\operatorname{sgn}(e) = 1.$
- $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sgn}\sigma)^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma.$

「sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」 代数入門

(*) の証明 符号の定義の分母をはらって,

$$D(x_{\tau(1)}, \ldots) = \operatorname{sgn}(\tau) \times D(x_1, \ldots) \qquad (**)$$

の両辺にはそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ が現れている. $x_1 = y_{\sigma(1)}, \ldots, x_n = y_{\sigma(n)}$ を代入する.

$$右辺 = \operatorname{sgn}(\tau) \times D(y_{\sigma(1)}, \ldots) \overset{(**)}{=} \operatorname{sgn}(\tau) \times \operatorname{sgn}(\sigma) D(y_1, \ldots)$$

$$左辺 = D(y_{\sigma(\tau(1))}, \ldots) = \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \times D(y_1, \ldots)$$

ここまで来たよ

巡回置換と互換

定義 (巡回置換)

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して，$1 \leq k \leq n$ とする．次の形の X の置換を巡回置換 (cyclic permutation) という．

$$\begin{aligned} \sigma(i_1) &= i_2, \\ \sigma(i_2) &= i_3, \\ &\vdots \\ \sigma(i_{k-1}) &= i_k \\ \sigma(i_k) &= i_1, \\ \sigma(i) &= i \quad (\text{他の } i \text{ つまり} i \neq i_1, \dots, i_k) \end{aligned}$$

例 $n = 5, k = 3$ で $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

略記 上の巡回置換を $(4\ 1\ 5) = (1\ 5\ 4) = (5\ 4\ 1)$ と略記する．

定義 (互換 加藤 線形代数 例 5(p.105))

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 σ で，ある $i_1, i_2 \in X$ $(i_1 \neq i_2)$ で

$$\begin{aligned} \sigma(i_1) &= i_2, \\ \sigma(i_2) &= i_1, \\ \sigma(i) &= i \quad (i \neq i_1, i_2) \end{aligned}$$

の形のものを 互換 (transposition) といい，$(i_1\ i_2)$ と略記する．

互換は長さ 2 の巡回置換．

事実 (加藤 線形代数 例 5(p.105))

互換は奇置換

例 $X = \{1, \ldots, 5\}$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 5)$. 転倒数=

例 $X=\{1,\dots,5\}$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2\ 4) = (i\ j)$.

$$
\begin{aligned}
&D(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\
&=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)\\
&\quad(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)\\
&\quad(x_3-x_4)(x_3-x_5)\\
&\quad(x_4-x_5).\\
&D(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)},x_{\sigma(4)},x_{\sigma(5)})\\
&=(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(5)})\\
&\quad(x_{\sigma(2)}-x_{\sigma(3)})(x_{\sigma(2)}-x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(2)}-x_{\sigma(5)})\\
&\quad(x_{\sigma(3)}-x_{\sigma(4)})(x_{\sigma(3)}-x_{\sigma(5)})\\
&\quad(x_{\sigma(4)}-x_{\sigma(5)})\\
&=(x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_1-x_2)(x_1-x_5)\\
&\quad(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_5)\\
&\quad(x_3-x_2)(x_3-x_5)\\
&\quad(x_2-x_5).
\end{aligned}
$$

転倒数=赤い因子の個数は 縦 $(j-i)+$ 横 $(j-i)-1=$ 奇.

置換の符号の別の特徴づけ

加藤 線形代数 なし

定理 (置換の符号の特徴づけ)

置換 σ が,
k 個の互換 τ_i $(i = 1, \dots, k)$ の積 $\sigma = \tau_k \dots \tau_1$ として書けるとき,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

業界用語: 特徴づけ=characterization, defining property. 定義と同値で, こちらを定義にしてもよいような性質のこと.

こちらを定義にする場合, 先に well-definedness を確かめる必要がある

- すべての置換は, 互換の合成として書ける
- 互換の個数の偶奇は, 互換の合成の表し方によって変わらない

前半部分 (書けること)

事実 (加藤 線形代数 章末問題 1(p.133))

すべての置換は巡回置換の合成で書ける.

事実

長さ k の巡回置換は, $k-1$ 個の互換の合成で書ける.

加藤 線形代数 例 6, 練習 6(p.106)

よって, 巡回置換は, 長さ k が偶数なら奇置換, 奇数なら偶置換.

事実 (加藤 線形代数 章末問題 2(p.133))

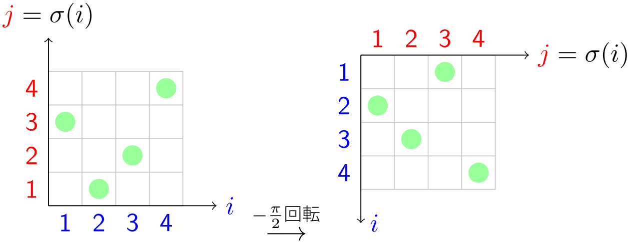
すべての置換は互換の合成で書ける.

ここまで来たよ

互換のグラフ

$n = 4, X = \{1, 2, 3, 4\}$.
例として X の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
左が $j = \sigma(i)$ の'グラフ'

- 変換であること: 各列に●が 1 個ある
- '1 対 1 かつ上への' 変換であること: 各行に●が 1 個ある



あれっ 4 次の正方行列?

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 σ は, n 次の正方行列の, 特定パターンの n 個の成分●
$(i, \sigma(i))$ $(i = 1, \ldots, n)$ の選択を指定する.
問: σ^{-1} のグラフは?

◆行列式の定義

定義 (行列式 (Determinant) 加藤 線形代数 定義 2-1(p.107))

n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対して,

$$\det A=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\text{置換●})\cdot\text{成分●の積}=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

を n の行列式 (determinant) という. $\sum$ は $n!$ 個の置換全ての和.

用語の注意:「行列式」は「あんパン」のようなもの. あんのことをあんパンと言ったら詐欺. 行列式は行列ではない (スカラーである).

邪悪な記法

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}.$$

$|\quad|$ は絶対値, $|\quad|$ は行列式. $\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right|=|-2|=2.$

行列式の直接計算の例

加藤 線形代数 例 1–4(pp.107-109)

例 0

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

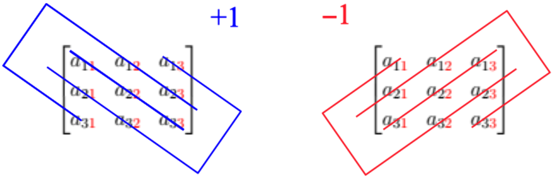
例 1 $n = 2$

加藤 線形代数 練習 1(p.108), 章末問題 3(1)(p.133) 加藤 線形代数 p.34 $2! = 2$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \Delta$$

例 2 $n = 3$ 加藤 線形代数 練習 2(p.109), 章末問題 3(2)(p.133) $3! = 6$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



サラスの公式

加藤 線形代数 図 2(p.108)

対角行列の行列式

対角行列の行列式は対角成分の積で与えられる．特に $\det(E) = 1$.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdots\cdots a_{nn}$$

証明：和は $\sigma = \mathrm{e}$(恒等置換) のみ．mobius　K4.2.10

例 3

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} = \mathrm{sgn}(2\ 3)5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = -1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

$n = 4$ では「サラスの公式」的なものは作れない．V 的な置換が拾えない．行列式の定義をそのまま使うしかない．正しくは $4! = 24$ 項の和だが「サラスの公式」的なものを誤適用すると 8 項になってしまう．

Quiz(行列式)

次の行列式の値を求めよう.

- $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ここまで来たよ

◆行列式の行多重線形性

定理 (行多重線形性 加藤 線形代数 定理 2-1(p.110))

A: n 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, 第 i 行に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

$f(x)$ の線形性 (linearity): $f(kx+\ell y) = kf(x) + \ell f(y)$ が成り立つこと.
多重線形性 (multi-linearity): $f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \det {}^t[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ のどの引数についても線形性を持つこと. mobius K4.2.70

証明 $i=1$ で一般性を失わない.

$$\begin{aligned} \text{左辺} =& \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(kb_{\sigma(1)} + \ell c_{\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ =& k\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &+\ell\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) c_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \text{右辺}. \end{aligned}$$

L23-Q1

Quiz(行列式の行多重線形性)

次の行列式を，行多重線形性を利用して，対角行列の行列式に帰着させて計算しよう．

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70

◆行列式の行交代性

定理 (行列式の行交代性 加藤 線形代数 定理 2-2(p.111))

A: $n \times n$ 行列,
$\boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$: A の第 i 行ベクトル

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = (-1) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化 (特殊な場合 $\tau =$ 互換, として上を含む)

定理 (行列式の行の置換のもとでの変換 加藤 線形代数 定理 2-3(p.112))

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化のほうの証明

左辺の $\det B = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$ を変形して, 右辺の形に持っていく.
あえて, $\sigma(i) = \sigma\tau^{-1}\tau(i)$ と書く.

$$\det B = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma\tau^{-1}\tau(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma\tau^{-1}\tau(n)}$$

行番号 $\tau(i) = 1, 2, 3,$ で積の順をソート

$$= \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)}$$

合成置換 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ とおく. σ の和を ρ の和で置き換え ($\sigma \mapsto \sigma\tau^{-1}$ は置換の全単射)

$$= \sum_\rho \mathrm{sgn}(\rho\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}$$

加藤 線形代数 定理 1-1(p.104) より

$$= \sum_\rho \mathrm{sgn}(\rho)\,\mathrm{sgn}(\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = \text{右辺}.$$

L23-Q2

Quiz(行列式の行交代性)

次の行列 A の行列式 $\det A$ を，行の置換に対する性質 (行交代性の一般化) を利用して，対角行列の行列式と置換の符号に帰着させて計算しよう．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mobius　K4.2.70