4.2 行列式 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L24(2024-07-03 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-03 Wed 07:13 JST hig"

今日の目標

- 行列式の列多重線形性, 交代性を説明できる
- 転置の行列式, 行列式の積公式を利用できる
- 行列式を, 定義と性質を使って計算できる

TA Prob and Sol: 行列式

次の行列式の値を求めよう.

- $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

略解

1. $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -13.$

2. サラスの公式より，

$$\det\begin{bmatrix}2&1&3\\3&0&5\\5&1&2\end{bmatrix}=0+3\cdot1\cdot3+5\cdot1\cdot5-0-5\cdot1\cdot2-2\cdot1\cdot3=$$
$$0+9+25-0-10-6=18.$$

3. 行列式の定義から計算すると，$\sum_\sigma$ のうち non-zero なのは $\sigma=(2\ 3)$ の項のみ.

$$\det\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&3&0\\0&7&0&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}=\mathrm{sgn}((2\ 3))2\cdot3\cdot7\cdot5=-210.$$

別解行列式の行交代性を使って，

$$\det\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&0&3&0\\0&7&0&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}=\mathrm{sgn}((2\ 3))\times\det\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&7&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}$$ のように対角行列の行列式に帰着させてもよい.

L23-Q1

Quiz 解答: 行列式の行多重線形性

$\boldsymbol{a}_2 = 3\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より,

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = 3\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} + 11\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

第 1 項は対角行列の行列式．第 2 項は，どのような σ に対しても，$a_{\sigma^{-1}(2)2} = 0$ より zero で．行列式の値は和で，$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7 + 11 \cdot 0$.

ここまで来たよ

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

24 4.2 行列式 | 第 4 章 行列式
- ◆多重線線形性と交代性|2. 行列式
- 行列式のいろいろな性質
- ◆列基本変形|1. 基本行列と基本変形

◆行列式の行交代性

定理 (行列式の行交代性 加藤 線形代数 定理 2-2(p.111))

A: $n \times n$ 行列,

$\boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$: A の第 i 行ベクトル

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = (-1) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化 (特殊な場合 $\tau =$ 互換, として上を含む)

定理 (行列式の行の置換のもとでの変換 加藤 線形代数 定理 2-3(p.112))

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化のほうの証明

左辺の $\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$ を変形して, 右辺の形に持っていく.
あえて, $\sigma(i) = \sigma\tau^{-1}\tau(i)$ と書く.

$$\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma\tau^{-1}\tau(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma\tau^{-1}\tau(n)}$$

行番号 $\tau(i) = 1, 2, 3,$ で積の順をソート

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)}$$

合成置換 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ とおく. σ の和を ρ の和で置き換え ($\sigma \mapsto \sigma\tau^{-1}$ は置換の全単射)

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)}$$

$\boxed{\text{加藤 線形代数 定理 1-1(p.104)}}$より

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} = \text{右辺}.$$

L24-Q1

Quiz(行列式の行交代性)

次の行列 A の行列式 $\det A$ を，行の置換に対する性質 (行交代性の一般化) を利用して，対角行列の行列式と置換の符号に帰着させて計算しよう．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70

◆多重線線形性と交代性 (前回の復習)

加藤 線形代数 定理 2-1(p.110)

定理 (行多重線形性)

A: n 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, ある行 i に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 定理 2-3(p.112)

定理 (行列式の行の置換のもとでの変換)

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

行列式がゼロになる場合

系 (加藤 線形代数 定理 2-1,2,3(pp.110-112) の系)

A: n 次の正方行列
$\boldsymbol{a}_i$: i 行目の行ベクトル

- $(\exists i$ s.t.$\boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}) \Rightarrow \det A = 0.$
- $(\exists i, j(i \neq j), c \in \mathbb{R}$ s.t.$\boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a}_j) \Rightarrow \det A = 0.$

mobius K4.2.90
s.t.=such that
$\exists x$s.t.条件：条件を満たすような x が存在する.

- 置換に関する和で書いた定義から
- $c = 0, 1$ はやさしい. $c \neq 0, 1$ の場合も多重線形性で $c = 1$ に帰着.

ここまで来たよ

行列式のいろいろな性質

行列式は，正方行列に実数を対応させる写像
正方行列にはいろいろな変換や演算や性質があった．それらのもとで，
行列式はどう振る舞うのか，を問うのは自然

- ${}^{\mathrm{t}}A$
- kA
- $A+B$
- AB
- A^{-1}
- A が正則・(反) 対称・〔ブロック〕対角・上 (下) 三角のとき
- $\vdots$

◆転置行列の行列式

定理 (転置行列の行列式 加藤 線形代数 定理 2-4(p.113))

$\det({}^{\mathrm{t}}A) = \det(A).$

行列の転置の行列式は，元の行列の行列式

証明

$$\begin{aligned}
\det({}^{\mathrm{t}}A) &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&\overset{\text{積の並び替え}}{=} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&\overset{\tau=\sigma^{-1}\text{と定義}}{=} \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&\overset{\text{逆置換の符号}}{=} \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det(A).
\end{aligned}$$

◆行列式の積公式

定理 (行列式の積公式 加藤 線形代数 定理 2-7(p.116))

$\det(AB) = \det(A)\det(B).$

積の行列式は，行列式の積 mobius　K4.2.90

証明ブロック分けでの積 加藤 線形代数 p.27

$$\det(AB) \overset{\text{ブロック分け}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{ブロックの計算}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{1n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ a_{21}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{2n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{2 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1+\cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{3,\cdots,n\text{ 行目の行多重線形性}}{=\cdots=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{i_n} \end{bmatrix}$$

(*) n^n 個の和のうち, 行が重複して行列式が 0 にならない条件から, 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対応する $n!$ 個だけ残る.

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{\sigma(1)} \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{行交代性}}{=} \left(\sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\,\mathrm{sgn}(\sigma)\right)\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{定義}}{=} \det A \det B.$$

補題 (単位行列の行列式 加藤 線形代数 例 4(p.109))

$\det(E) = 1.$

命題 (スカラー倍の行列式)

$k \in \mathbb{R}$, n 次正方行列 A に対して，

$$\det(kA) = \det(kEA) = \det(kE)\det A = k^n \det A$$

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) の系

系 (逆行列の行列式 加藤 線形代数 系 2-2(p.118))

A が正則行列ならば
$\det(A) \neq 0.$
$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

(正則なら) 逆行列の行列式は，行列式の逆数
「$\det$ は, n 次の正則行列全体から, 乗法群 $\mathbb{R}_{\neq 0}$ への群準同型写像である」

L24-Q2

Quiz(行列式の性質を使った計算)

A, B を n 次正則行列，E を n 次単位行列とする．
$\det(A) = p, \det(B) = q, \det(A+E) = r, \det(B+E) = s, \det(A+B) = t$ とする．

1. 次の行列式を を p, q, r, s, t, n で表そう．
   1. $\det(({}^{t}A)^{-2})$.
   2. $\det(A^5 + A^4)$.
   3. $\det(2E)$.
   4. $\det(3\,{}^{t}ABA^{-1}B^2)$
2. 行列の式 $A^2(A+B)A^{-2}$ を展開して簡単化しよう．
3. 行列式 $\det(A^2(A+B)A^{-2})$ を p, q, r, s, t, n で表そう（展開しないほうがいいかも）
4. 行列の式 $B^{-1}(BA+A)B$ を展開して簡単化しよう．
5. 行列式 $\det(2B^{-1}(BA+A)B)$ を p, q, r, s, t, n で表そう（展開しないほうがいいかも）

ここまで来たよ

23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

24 4.2 行列式 | 第 4 章 行列式

- ◆多重線線形性と交代性|2. 行列式
- 行列式のいろいろな性質
- ◆列基本変形|1. 基本行列と基本変形

◆列基本変形

定義 (行列の列基本操作 (elementary column operations) 加藤 線形代数 p.78**)**

$\boxed{i}, \boxed{j}$ は行列の列番号

(C1) $\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$, $i \neq j$
(C2) $\boxed{i} \times$ (定数c), $c \neq 0$
(C3) $\boxed{j} \times$ (定数a) $+ \boxed{i}$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column
これらは可逆
列基本変形 列基本操作を繰り返して行列を変形すること

加藤 線形代数 練習 4(p.78)

◆基本行列と列基本変形 加藤 線形代数 p.79

命題 (列基本操作 $\leftrightarrow$ 基本行列の右からの積)

$m \times n$ 行列 A に対して, 列基本操作は n 次の基本行列を右からかけるのと同じ

(C1) P_{ij} を右からかける
(C2) $P_i(c)$ を右からかける
(C3) $P_{ji}(a)$ を右からかける $\boxed{j} \times$ (定数a) $+ \boxed{i}$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} P_{12}(2) =$$

加藤 線形代数 練習 5(p.80)

列基本変形 基本行列の積を右からかけるのと同じ
「まず (C1), つぎに (C3)」は $(AP_{12})P_{23}(5)$ なので, 行列の積
$P = P_{12}P_{23}(5)$.

加藤 線形代数 練習 6(p.80)

列多重線形性と列交代性

定理 (加藤 線形代数 定理 2-5, 2-6(p.115))

「列についても行と同様に多重線形性, 交代性 加藤 線形代数 定理 2-1,2,3 がなりたつ」

定理 (加藤 線形代数 練習 5(p.116))

「列についても，行と同様な $\det A = 0$ の十分条件 加藤 線形代数 系 2-1(p.112) がある」

行列式にとって, 行と列は同じ性質を持つ

mobius K4.2.70, K4.2.80

L24-Q3

Quiz(行列式の行多重線形性・行交代性)

次の行列 A の行列式 $\det A$ を，行（または列）多重線形性，行（列）交代性，対角行列の行列式を利用して計算しよう．行列式の定義からも計算してみよう．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mobius K4.2.70