4.3 行列式の計算 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L25(2024-07-05 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-05 Fri 12:38 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 §4.3 行列式を, 行基本変形で簡約階段化することで計算できる
- 加藤 線形代数 §4.3 行列式を, 行基本変形で階段化やその他の方法で楽に計算できる

L24-Q1

Quiz 解答: 行列式の行交代性

$$\det A = \mathrm{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし，$\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ は互換で $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ より，$\det A = -1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1$.
別解 $\det A = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{4\sigma(4)}$ と書いたとき，$a_{i\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ がすべて zero でないのは，$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ のみ.

L24-Q2

Quiz 解答: 行列式の性質を使った計算

1.
   1. $\det(({}^{t}A)^{-2}) = \det(({}^{t}A))^{-2} = \det(A)^{-2} = p^{-2}$.
   2. $\det(A^5 + A^4) = \det((A + E)A^4) = \det(A + E)\det(A)^4 = p^4 r$.
   3. $\det(2E) = 2^n \det(E) = 2^n$.
   4. $\det(3\,{}^{t}ABA^{-1}B^2) = \det(3E\,{}^{t}ABA^{-1}B^2) =$
      $\det(3E)\det({}^{t}A)\det(B)\det(A)^{-1}\det(B)^2 = 3^n pqp^{-1}q^2 = 3^n q^3$.
2. $A^2(A + B)A^{-2} = A + A^2BA^{-2}$.

3. $\det(A^2(A+B)A^{-2}) = \det(A)^2 \det(A+B) \det(A)^{-2} = t.$
4. $B^{-1}(BA+A)B = AB + B^{-1}AB.$
5. $\det(2B^{-1}(BA+A)B) = \det(2EB^{-1}(B+E)AB) =$
   $\det(2E)\det(B)^{-1}\det(B+E)\det(A)\det(B) = 2^n sp.$

ここまで来たよ

◆還元定理

還元=reduction, 還元する=小さいものに帰着させる?

定理 (行列式の還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119))

$(1,(n-1))\times(1,(n-1))$ にブロック分けされた行列 A に対して，下の様に一部分が 0 であるとき，行列式はブロック A' の行列式に帰着される．

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & * \cdots * \\ \mathbf{0} & A' \end{bmatrix} = a_{11}\det(A').$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ * & A' \end{bmatrix} = a_{11}\det(A').$$

証明

$\det(A) = \det({}^{\mathrm{t}}A)$ より後者だけ証明すれば十分.

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

a_{1i} は, $i=1$ の a_{11} 以外 0. つまり $\sigma(1)=1$ でない σ は成分の積が 0 になる. $\{2,\cdots,n\}$ の置換を σ' と書き

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma'} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{11} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\ &= a_{11} \sum_{\sigma'} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\ &= a_{11} \times \det(A'). \end{aligned}$$

加藤 線形代数 練習 2(2)(p.102)

系 (上三角行列・下三角行列の行列式 加藤 線形代数 系 3-1(p.120))

$A = [a_{ij}]$: n 次の上三角行列のとき，行列式は対角成分の積．

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

証明 (n に関する数学的帰納法)

- $n = 1$ のとき, $\det A = a_{11}$.
- $n = k$ **のとき正しいと仮定する.**

  $n = k + 1$ のとき, 還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(1) より, $\det A = a_{11} \det A'$.
  A' は k 次の上三角行列なので, 帰納法の仮定より, $\det A' = \prod_{i=2}^{k+1} a_{ii}$.
  よって, $\det A = \prod_{i=1}^{k+1} a_{ii}$. **すなわち,** $n = k + 1$ **のときも正しい.**

下三角行列についても同様 下三角は上三角の転置だから 加藤 線形代数 定理 2-4(p.113).

対角行列は, これの特殊な場合 加藤 線形代数 例 4(p.109)　　特殊 ← 一般

基本変形と行列式

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) A, B: n 次の正方行列に対して,
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85),pp.87,88 任意の正則行列 A は基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ で E に簡約階段化される (どの P かは, 逆行列を求めるのと同じ過程でわかる).

$$
\begin{aligned}
P_1 P_2 \dots P_s A =& E \\
A =& P_s^{-1} \dots P_1^{-1} E \\
\det(A) =& \det(P_s)^{-1} \dots \det(P_1)^{-1} \det(E)
\end{aligned}
$$

A の行列式は，簡約階段化に使った基本行列の行列式の逆数の積

基本行列の行列式

L25-Q1

基本行列の行列式 加藤 線形代数 定理 3-2(p.121)

基本行列 加藤 線形代数 p.75 の行列式を求めよう.

1. $\det(P_{ij}) = ?$
2. $\det(P_i(c)) = ?$
3. $\det(P_{ij}(a)) = ?$

加藤 線形代数 定理 3-2(p.121)

mobius K4.2.70, mobius K4.2.90

基本行列をかける ＝ 基本操作する

定理 (基本操作と行列式 加藤 線形代数 定理 3-3(p.122))

A に次の基本操作をして得た行列を B とする.
$A \overset{R,C}{\to} B$.

	基本行列		行列式	
行基本操作 R1	P_{ij}	$i \leftrightarrow j$	$\det A =$	$(-1) \times \det B$
行基本操作 R2	$P_i(c)$	$i \times c$	$\det A =$	$\frac{1}{c} \times \det B$
行基本操作 R3	$P_{ij}(a)$	$j \times a + i$	$\det A =$	$\det B$
列基本操作 C1	P_{ij}	$\boxed{i} \leftrightarrow \boxed{j}$	$\det A =$	$(-1) \times \det B$
列基本操作 C2	$P_i(c)$	$\boxed{i} \times c$	$\det A =$	$\frac{1}{c} \times \det B$
列基本操作 C3	$P_{ji}(a)$	$\boxed{j} \times a + \boxed{i}$	$\det A =$	$\det B$

L25-Q2

Quiz(行列式)

行基本変形で階段行列に直すことにより，次の行列式を求めよう．

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

mobius K4.3.10 `https://bit.ly/redmatrix`

あいまいさのないアルゴリズム

入力: n 次正方行列 A，出力: 行列式
行列式を $=$ でつないで計算していく．定数倍がでたときはそれを記す.

- (逆行列を求めるのと同じ) 行基本変形で (簡約) 階段形にしていく
- 許される手抜き方法
  - 主成分 (0 ではない) は 1 にしてもしなくてもよい (簡約でなくてよい)
  - 主成分の上側の成分はゼロにしなくてよい (簡約でなくてよい)
  - 主列でない列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - 0 ばかりの行, 列, 定数倍の行, 列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - 上三角行列になった段階で終了
- 係数かける対角成分の積を出力して終了

（慣れた人向け）還元定理を使ったり，残りの右下ブロックが 2×2, 3×3 になったら, サラスの公式を使ったりしてもよい．列基本変形を使ってもよい．
還元定理は,「右下ブロックだけ見る」ことに相当

復習: 掃き出し法 線形代数☆演習 I(2024)L17 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ

(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていってピボットにする

(3) 持っていった非零成分 c を R2 ① $\times (1/c)$ で 1 にする

(4) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の a を零にする

(10) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックのその列の上側を零にする

(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う

(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

簡約階段形や逆行列を求める，と，行列を求める，との違い

求めるもの	簡約階段形，方程式の解，逆行列	行列式の値
対象	行列 $\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$, $\left[\begin{array}{cc\|cc} \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 1 \end{array}\right]$	行列式 $\det \begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$
つなぐもの	$\rightarrow$	$=$
許される操作	R のみ (*)	R と C
ゴール	簡約階段形	(上) 三角行列
併用できる操作		還元，展開 (来週)，サラスの公式 (3×3)，行列式が 0 になる十分条件

(*) 簡約階段形から進んで標準形 加藤 線形代数 定理 1-2(p.81) を求めるときは C も使います．

線形代数 I を通過した人は，区別して完璧に実行できるべき手順．
レポート方式の trialL27(?) で対比して確認します．

加藤 線形代数 例題 1，練習 5(p.123) mobius K4.2.10