4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L26(2024-07-10 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-10 Wed 07:57 JST hig"

今日の目標

- 加藤 線形代数 定理 4.1(p.125) 行列式を, 余因子展開で計算できる
- 加藤 線形代数 定理 4.4(p.130) 行列式の値による, 正則行列の特徴付けを説明できる
- 加藤 線形代数 定理 4.5(p.131) 逆行列の公式を説明できる

L25-Q1

Quiz 解答: 行列式

確認:階段行列.

$$1\times\begin{vmatrix}4&0&8&4\\3&1&4&3\\0&1&-2&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{①\times\frac{1}{4}}{=}4\times\begin{vmatrix}1&0&2&1\\3&1&4&3\\0&1&-2&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{①\times(-3)+②}{=}4\times\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&1&-2&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{②\times(-1)+③}{=}4\times\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&0&0&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{④\leftrightarrow③}{=}-4\times\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{vmatrix}=$$

-60

簡約階段化で，という指定がない場合，最初の $\frac{1}{4}$ 倍は必須ではありません．

ここまで来たよ

◆余因子

今日の動機

- 第 1 行や第 1 列と限らず, ゼロ成分が多い行や列があったときに還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119) 的な操作をしたい
  - 基本変形 R1 加藤 線形代数 例題 1(p.123) はひとつの方法
- これに該当しないときも, 強引に行列式の次数を reduce したい

定義 (小行列式と余因子 加藤 線形代数 p.124 加藤 線形代数 定義 4-1(p.125))

A: n 次の正方行列 のとき,
A の (i, j) 小行列式 (minor) $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, A から第 i 行, 第 j 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.
A の (i, j) 余因子 (adjugate) $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

(i, j) 小行列式にかけられる符号=(i, j) 余因子に含まれる符号

$$(-1)^{i+j} = \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

小行列 (submatrix) は, 1 行 1 列とは限らず複数の行と列を取り除いて得られる行列をさす言葉. 部分行列?

例 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} = \qquad , \begin{matrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{matrix} = \qquad .$$

加藤 線形代数 例 1, 練習 1(p.124), 例 2, 練習 2(p.125) mobius 4.4.10

ここまで来たよ

◆行列式の余因子展開

展開 (expansion) 1個の複雑なものを, 単純なもの複数の和として書くこと

定理 (余因子展開 加藤 線形代数 定理 4-1(p.125))

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列

$\tilde{a}_{ij}$ を A の (i, j) 余因子 とするとき,

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{i\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{\ell j}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明 i 行目に行多重線形性を適用する. 交代性を使って, $a_{i\ell}$ を $(1, 1)$ に持っていく. この時出る符号は $(-1)^{i-1+\ell-1}$. 還元定理を使う.

加藤 線形代数 例 3, 例題 1(p.127), 練習 4(p.128) mobius 4.4.30 mobius 4.4.50

(i,j) 小行列式にかけられる符号=(i,j) 余因子に含まれる符号 $= \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$

どこかの 1 行, またはどこかの列を選んで展開する. n 項の和になる.
第 3 行についての展開 (., $\bullet$ はつめて, $n-1$ 次の行列式を計算)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = +31 \begin{vmatrix} . & 12 & 13 & 14 \\ . & 22 & 23 & 24 \\ \bullet & . & . & . \\ . & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} -32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} +33 \begin{vmatrix} 11 & 12 & . & 14 \\ 21 & 22 & . & 24 \\ . & . & \bullet & . \\ 31 & 32 & . & 44 \end{vmatrix} -34 \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & . \\ 21 & 22 & 23 & . \\ . & . & . & \bullet \\ 31 & 32 & 43 & . \end{vmatrix}$$

第 2 列についての展開

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} . & \bullet & . & . \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} +22 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} -32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} +42 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ . & \bullet & . & . \end{vmatrix}$$

証明の実演 $i=2$ 行目についての余因子展開. 右側切れてます.

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix}11&12&13&14\\ a&b&c&d\\ 31&32&33&34\\ 41&42&43&44\end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{多重線形性}}{=}\det\begin{bmatrix}11&12&13&14\\ a&0&0&0\\ 31&32&33&34\\ 41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}11&12&13&14\\ 0&b&0&0\\ 31&32&33&34\\ 41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}11&12&13&14\\ 0&0&c&0\\ 31&32&33&34\\ 41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}11\\ 0\\ 31\\ 41\end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{交代性}}{=}(-1)^{i-1}\times\left(\det\begin{bmatrix}a&0&0&0\\ 11&12&13&14\\ 31&32&33&34\\ 41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0&b&0&0\\ 11&12&13&14\\ 31&32&33&34\\ 41&42&43&44\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}0&0&c&0\\ 11&12&13&1\\ 31&32&33&3\\ 41&42&43&4\end{bmatrix}\right.$$

$$\overset{\text{交代性}}{=}(-1)^{i-1}\times\left((-1)^0\det\begin{bmatrix}a&0&0&0\\ 11&12&13&14\\ 31&32&33&34\\ 41&42&43&44\end{bmatrix}+(-1)^1\det\begin{bmatrix}b&0&0&0\\ 12&11&13&14\\ 32&31&33&34\\ 42&41&43&44\end{bmatrix}+(\right.$$

$$\overset{\text{還元定理}}{=}(-1)^{i-1}\times((-1)^0a\det\begin{bmatrix}12&13&14\\ 32&33&34\\ 42&43&44\end{bmatrix}+(-1)^1b\det\begin{bmatrix}11&13&14\\ 31&33&34\\ 41&43&44\end{bmatrix}+(-1)^2$$

$$\overset{\text{小行列式の定義}}{=}(-1)^{i+1}am_{i1}+(-1)^{i+2}bm_{i2}+(-1)^{i+3}cm_{i3}+(-1)^{i+3}dm_{i4}$$

$$\overset{\text{余因子の定義}}{=}a\tilde{a}_{i1}+b\tilde{a}_{i2}+c\tilde{a}_{i3}+d\tilde{a}_{i4}$$

$$=a_{i1}\tilde{a}_{i1}+a_{i2}\tilde{a}_{i2}+a_{i3}\tilde{a}_{i3}+a_{i4}\tilde{a}_{i4}.$$

L26-Q1

Quiz(行列式の余因子展開)

次の行列式を考える.

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

1. この行列式を, 第 1 行に関して余因子展開しよう.
2. この行列式を, 第 2 列に関して余因子展開しよう.

L26-Q2

Quiz(行列式の還元定理)

次の行列式を考える.

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 9 & 11 \\ 13 & 37 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

1. この行列式を, 3×3 行列式で書き直そう.

行列式の余因子展開 (一般形)

定理 (余因子展開 (一般形) 加藤 線形代数 定理 4-2(p.128))

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列，
$\tilde{a}_{ij}$ を A の (i, j) 余因子とするとき，

- $\forall i, k \quad \det(A)\delta_{ik} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j, k \quad \det(A)\delta_{kj} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{k\ell}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明 $i=k$ で $\delta_{ik}=1$ となるケースは上で証明した.
以下，$i\neq k$ のケースを考える.
A で, k 行目に, i 行目を上書きコピーした行列を B とする.
実は 左辺 $=0=\det(B)$=右辺.

左辺=0 $=\det(B)$
$i\neq k$ と交代性より $\det(B)=$左辺.

$\det(B)=$ 右辺
$\det(B)$ の k 行目に関する余因子展開は $\det(B)=\sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell}\tilde{b}_{k\ell}$.
コピーの結果 $b_{k\ell}=a_{i\ell}$,
余因子 $\tilde{b}_{k\ell}$ は，$i\neq k$ より，コピーされた部分をはずしてるので,
$\tilde{b}_{k\ell}=\tilde{a}_{k\ell}$.
よって $\det(B)$ の余因子展開は右辺と一致する.

結論

$$\det(A)\delta_{ik}=\det(B)=\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$

$$0 = \det(B) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$

$i \neq k$ の場合の証明の実演

A の $i = 4$ 行を $k = 2$ 行にコピーして B を作成.
B を $k = 2$ 行で展開.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 = \det(B) &= \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \\ &= 41\tilde{a}_{21} + 42\tilde{a}_{22} + 43\tilde{a}_{23} + 44\tilde{a}_{24} \\ &= a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + a_{i3}\tilde{a}_{k3} + a_{i4}\tilde{a}_{k4}. \end{aligned}$$

ここまで来たよ

余因子行列

$$\forall i,k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$ (i 行目における余因子展開)

動機 $\tilde{a}_{k\ell}$ じゃなくて $\tilde{a}_{\ell k}$ だったら行列の積の形になるのに…

定義 (余因子行列 加藤 線形代数 p.129**)**

$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列, その余因子を $\tilde{a}_{ij}$ とする.
A の余因子行列 $\tilde{A} = [b_{ij}]$ を, $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ である n 次正方行列と定義する.

余因子を素直に行列状に並べて，その後で転置したもの.

例

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

定理 (余因子展開 (行列形) 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129))

$A = [a_{ij}]$ を n 次の正方行列,
$\tilde{A}$ を A の余因子行列とするとき,

$$\det(A) \times E = A\tilde{A} = \tilde{A}A$$

証明 加藤 線形代数 定理 4-2(p.128) の和を, 行列の積とみただけ

定理 (逆行列の明示公式 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) の 加藤 線形代数 系 4-1(p.129))

A を n 次の正則行列,
$\tilde{A}$ を A の余因子行列とするとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

計算問題には使わないこと.

例 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^{-1} =$

$B = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{bmatrix}, B^{-1} =$

正方行列について，正則 $\Leftrightarrow$ 行列式 $\neq 0$

定理 (正則行列の特徴づけ 加藤 線形代数 定理 4-4(p.130))

A: n 次の正方行列 のとき
次は同値

(a) A は正則
(b) $\mathrm{rank}\, A = n$「フルランク」
(c) $\det(A) \neq 0$

- 証明済
  - (a)⇔(b) 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)
  - (a)⇒(c) 加藤 線形代数 系 2-2(p.118)
- ここで証明
  - (c)⇒ (a) 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) より, $\det(A) \neq 0$ なら A^{-1} が存在する.