平面の 1 次変換と行列式の意味

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L28(2024-07-17 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-18 Thu 15:42 JST hig"

今日の目標

- 2 次の行列式で平行四辺形の符号付き面積が求められる
- 2 次の行列式が符号付き面積拡大率であることを説明できる
- 2 次の行列式の性質を図形的に説明できる

ここまで来たよ

1 次変換 加藤 線形代数 p.7 と行列 (L07)

定義 (1 次変換, 線形変換)

$\mathbb{R}^2$ の変換で,

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

の形のものを (2 次元の)1 次変換, 線形変換 という.

加藤 線形代数 例題 2(p.9), mobius K0.2.10, teamL07-1

写像 $f : X \to Y$.
$x \in X, y \in Y$.
$U \subset X, V \subset Y$.
のとき,
$f(x) = y$ を言う言葉

- f による x の像は y
- f は x を y に写す
- x は f で y に写される
- x は f で y に写る

$f(U) = \{y | \exists x \in U \quad \text{s.t. } f(x) = y\} = V$ を言う言葉

- f による U の像は V
- f は U を V に写す
- U は f で V に写される
- U は f で V に写る

L28-Q1

Quiz(1 次変換の像と逆像)

行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換を考える.

1. $\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ の, f による像を求めよう.
2. f による像が $\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ となるような $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ を求めよう.

平面内の直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183 (L04)

$\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に平行な直線のパラメタ表示 加藤 線形代数 p.183

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

$$\text{すなわち}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \qquad (t \in \mathbb{R}\text{はパラメタ})$$

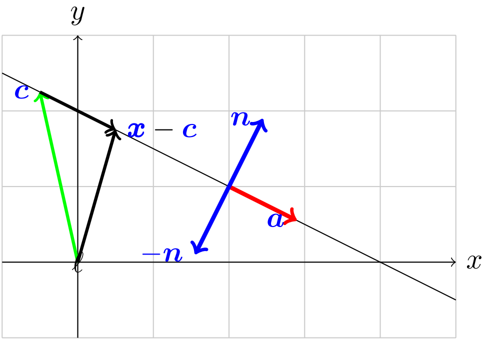
$\boldsymbol{a}$ を直線の接 (線) ベクトルという.

理由

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ として成分で書くと,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$



GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

平面内の直線のパラメタ表示

`https://www.geogebra.org/m/skj88vSN`

パラメタ表示された直線の像

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ $(t \in \mathbb{R})$ とパラメタ表示される直線の, 行列 A で表される 1 次変換 f による像は? ($\boldsymbol{a}$ 接ベクトル, $\boldsymbol{c}$ 直線上の点)

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上のパラメタ表示で書ける.
移動後の点 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. A が正則行列なら, 左から A^{-1} をかけて $A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$.
これをパラメタ表示に代入して, $A^{-1}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$.
両辺に左から A をかけて, $\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$.

命題 (直線の 1 次変換による像のパラメタ表示)

直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ の, 行列 A の表す 1 次変換による像のパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, これは直線.
A が正則のとき, 1 次変換で直線は直線に写る
接ベクトル $\boldsymbol{a}$ は $A\boldsymbol{a}$ に写る.
「通る点」$\boldsymbol{c}$ は $A\boldsymbol{c}$ に写る.

L28-Q2

Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

パラメタ表示

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

をもつ $\mathbb{R}^2$ の直線 ℓ と，行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 f を考える.

1. f による ℓ の像のパラメタ表示を求めよう.
2. f で ℓ に写る点全体の集合を求めよう.

正方形・平行四辺形の像

$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\begin{aligned} S =& \{ \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right] | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R} \} \\ =& \{ \boldsymbol{e}_1 s + \boldsymbol{e}_2 t | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

は，$\boldsymbol{0} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right], \boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right], \boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right], \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$ を 4 頂点とする正方形.

正方形の像

正則行列 A で表される 1 次変換 f による，正方形 S の像は？

$$
\begin{aligned}
f(S) =& \{A(\boldsymbol{e}_1 s + \boldsymbol{e}_2 t) | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R}\} \\
=& \{A\boldsymbol{e}_1\ s + A\boldsymbol{e}_2\ t | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, s, t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

これは，$\mathbf{0}, A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, A\boldsymbol{e}_1 + A\boldsymbol{e}_2$ を 4 頂点とする平行四辺形 ($A\boldsymbol{e}_1$ と $A\boldsymbol{e}_2$ が張る平行四辺形)
実は，平行四辺形の像も平行四辺形

実は A が正則行列であるなら $A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2$ は平行にならない（正方形はつぶれない）．A が正則でないなら正方形は直線や 1 点につぶれる

ここまで来たよ

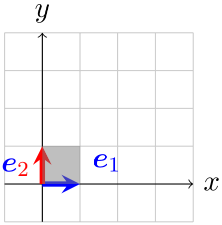
2 次の行列式と平行四辺形の面積

加藤 線形代数 なし 2 次正方行列 A, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$

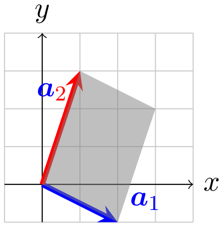
$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は, $\boldsymbol{x}$ を $A\boldsymbol{x}$ に写す.
例 $A = \left[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に写る.
A が正則なとき, 左図の正方形は, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形に写る.



$\xrightarrow{f}$



$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は?

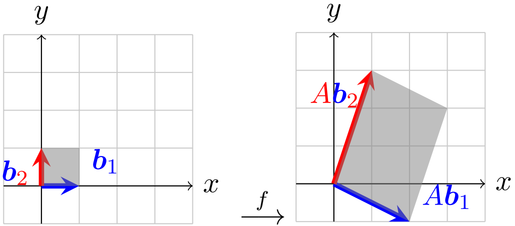
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sin\theta =& \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2|\boldsymbol{a}_2|^2(1-\cos^2\theta)} \\ =& \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})^2} \\ =& |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |\det A| = 7.\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^2$ で，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は，$\det(A) = \det[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]$.

上の例は，正方形（面積 $\det[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2] = 1$）が，1 次変換 f によって 面積 $|\det(A)|$ 倍に拡大された，とも解釈できる．

面積拡大率

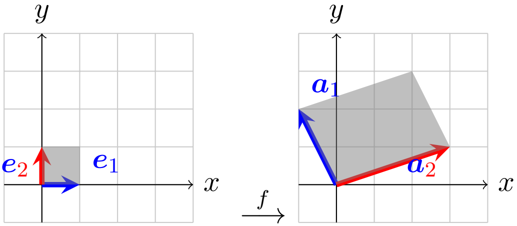
$\boldsymbol{b}_1 = \left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{b}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]$,. 正方形の面積は $\det\left[\,\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\,\right] = 4$.
$A\boldsymbol{b}1, A\boldsymbol{b}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は
$\det\left[\,A\boldsymbol{b}_1\,A\boldsymbol{b}_2\,\right] = \det(AB) = \det A \det B$.
正方形と比べて $\det A$ 倍.



$\boxed{\det A\ \text{は，平行四辺形が写されたときの面積拡大率}}$ mobius L28

平行四辺形が裏返しになるとき

例: $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.



f の拡大率は $\det A = -7$. 平行四辺形が裏返しに写っているとき ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の時計回りの順番が逆になっているとき), 拡大率 $\det A < 0$.
符号付き面積が -7 ということもある.

行交代性 ${}^t\boldsymbol{a}_1 \leftrightarrow {}^t\boldsymbol{a}_2$

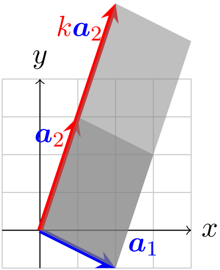
$$\boxed{\det \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ {}^t\boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix}}$$

行列式の性質の図形的説明 加藤 線形代数 なし

列多重線形性 $k\boldsymbol{a}_2$

$$\boxed{\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & k\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}2 & 1\cdot k\\ -1 & 3\cdot k\end{bmatrix}\\ =&k\times\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\\ =&k\times 7\end{aligned}$$

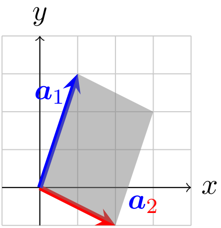


$k=2$

列交代性 $\boldsymbol{a}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{a}_2$

$$\boxed{\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\\ =&(-1)\times\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\\ =&-7\end{aligned}$$



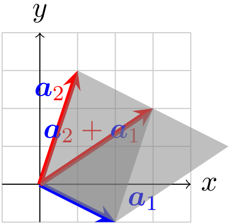
列基本操作 C2 $k\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ で不変 行多重線形性

$$\boxed{\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & k\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}}$$

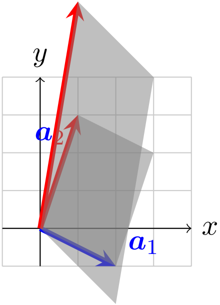
$$\boxed{\det\begin{bmatrix}{}^{t}\boldsymbol{a}_1\\ k\,{}^{t}\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}=k\det\begin{bmatrix}{}^{t}\boldsymbol{a}_1\\ {}^{t}\boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}}$$

$$\det\begin{bmatrix}2 & 2+1\\ -1 & -1+3\end{bmatrix}$$
$$=7$$

$$\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1\cdot k & 3\cdot k\end{bmatrix}$$
$$=k\times\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$
$$=k\times 7$$



$k=1$



$k=2$

積の行列式

$\boxed{\det(A_1A_2) = \det(A_1)\det(A_2)}$

A_1, A_2 の表す 1 次変換をそれぞれ f_1, f_2 とする.
$\det(A_1A_2)$: 積 A_1A_2 の表す合成変換 $f_1 \circ f_2$ で写したときの面積拡大率
$\det(A_1)\det(A_2)$: f_2 で写したときの面積拡大率, かける, さらに, f_1 で写したときの面積拡大率.
それらは同じはず

逆行列の行列式

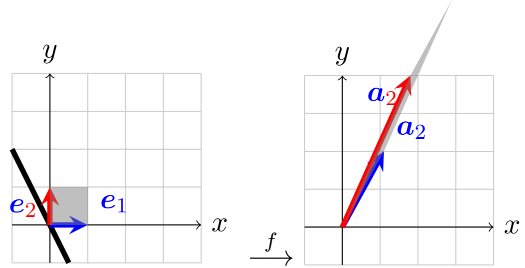
A が正則のとき,

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}}$$

A^{-1} の表す逆変換 f^{-1} の面積拡大率は,
A の表す 1 次変換 f の面積拡大率の逆数
になるはず

写すと平行四辺形がつぶれるとき

$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が定数倍の関係にあるとき．
$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} = 0.$



面積拡大率=0.
このとき，逆変換は存在しない．
一般に，A が正則でないとき，f の面積拡大率=0 であり，逆変換は存在しない．
つぶれるっていうのは，複数の点が同じ点に写されることだから．

L28-Q3

Quiz(1 次変換と行列式)

行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換を考える.
4 頂点 $\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ で定まる $\mathbb{R}^2$ 上の平行四辺形 P を考える.

1. f による直線 $x = 2$ の像を求めよう.
2. f により直線 $x = 2$ に写される点の集合を求めよう.
3. 平行四辺形 P の面積を求めよう.
4. f による平行四辺形 P の像は裏返しになるか?
5. f による平行四辺形 P の像の面積を求めよう.
6. f により平行四辺形 P に写される集合の面積を求めよう.