1 次変換の階数と像と逆像

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L29(2024-07-19 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-19 Fri 07:23 JST hig"

今日の目標

- 非正則な行列で表される 1 次変換の像と逆像が求められる.

L28-Q1

Quiz 解答:1 次変換の像と逆像

1. $f(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$
2. $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ すなわち $A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ について解けばよい．
   A は正則なので，両辺の左から A^{-1} をかけて，
   $\boldsymbol{b} = A^{-1}\boldsymbol{a} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$.

これは，$\boldsymbol{b} = f^{-1}(\boldsymbol{a})$ で，逆変換 f^{-1} が逆行列 A^{-1} で表されることを使ったと思うこともできる．

L28-Q2

Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

1. $\boldsymbol{x} = A\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}t + A\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}(t \in \mathbb{R})$.
2. A は正則なので，次でパラメタ表示される直線
   $\boldsymbol{x} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}t + A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}(t \in \mathbb{R})$.

L28-Q3

Quiz 解答:1 次変換と行列式

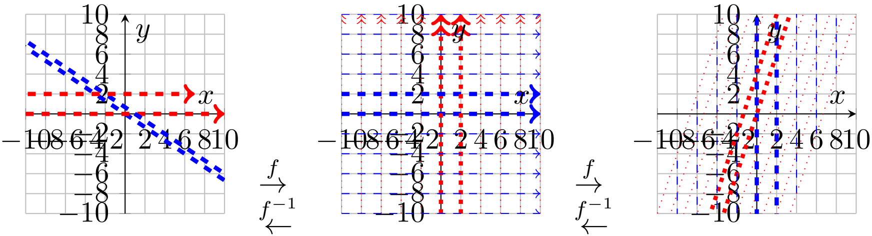
1. $x = 2$ のパラメタ表示は $\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]$ $(t \in \mathbb{R})$. A は正則. よって, 像は直線で, パラメタ表示は $\boldsymbol{x} = A\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right] t + A\left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]$ $(t \in \mathbb{R})$.
2. A は正則. よって, 集合は直線で, パラメタ表示は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right] t + A^{-1}\left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]$ $(t \in \mathbb{R})$.
3. $\det[\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2] = 5$.
4. $\det A = 13 > 0$ なので裏返しにならない.
5. $\det[A\boldsymbol{a}_1\ A\boldsymbol{a}_2] = \det(A)\det[\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2] = 65$.
6. A は正則なので, 集合は平行四辺形. $\det[A^{-1}\boldsymbol{a}_1\ A^{-1}\boldsymbol{a}_2] = \det(A^{-1})\det[\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2] = \frac{5}{13}$.

2 次正則行列の表す $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換

$A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ の表す $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換 f.
基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{e}_1 &= \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \\
A\boldsymbol{e}_2 &= \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right], \\
f(\boldsymbol{x}) = A(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) &= \left[\begin{smallmatrix} y \\ 2x+3y \end{smallmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

f は平面全体を平面全体に写す.



f の「符号付き」面積拡大率 $\det A = -2$.
$\det A < 0$ なので，f は裏返しに写す．
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を求めよ．
$\Leftrightarrow$ 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け．
この A は正則なので，任意の $\boldsymbol{b}$ について解が一意に定まる．
なぜなら，$\operatorname{rank} A = 2 = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$, 解がある．解の自由度 $2 - 2 = 0$.
$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

2 次非正則行列の表す $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換

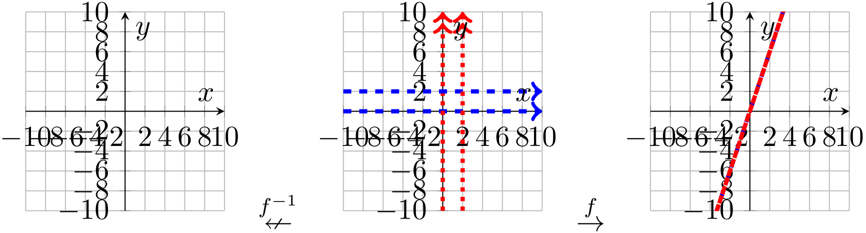
例として $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ を考える．
$\operatorname{rank} A = 1$, $\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] =?$. 解があるとき，解の自由度 $2 - 1 = 1$.
面積拡大率 $\det(A) = 0$. 逆行列 A^{-1} は存在しない．

もっと極端なケースとして，$A = O, \operatorname{rank} A = 0$.

$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2] = \left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{smallmatrix}\right]$, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{e}_1 &= \left[\begin{smallmatrix}1\\ 3\end{smallmatrix}\right], \\ A\boldsymbol{e}_2 &= \left[\begin{smallmatrix}2\\ 6\end{smallmatrix}\right], \\ f(\boldsymbol{x}) = A(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) &= \begin{bmatrix} x+2y \\ 3(x+2y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

すべての $f(\boldsymbol{x})$ は，原点を通る直線 ℓ, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 t$ 上にある！
$f(\mathbb{R}^2) = \{\boldsymbol{y} | \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\} = \{\boldsymbol{y} | \exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_1 t\}$.



図的解釈 f は平面全体を直線 ℓ に「圧縮」する

このことから，逆変換 f^{-1} が存在しないことがわかる.

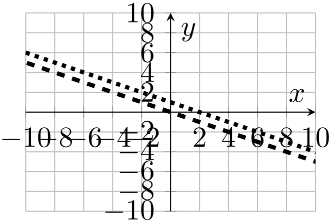
- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 t$ 上にない点 $\boldsymbol{b}$ を f^{-1} で写せと言われたら困るでしょ
- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 t$ 上の点 $\boldsymbol{b}$ は「戻せる」($f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ がある)

同じことだけど，連立 1 次方程式に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解があるとは限らないことがわかる.

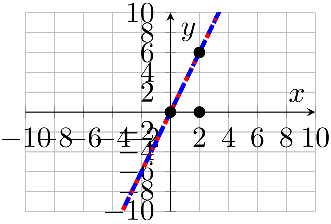
- $\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = 2 > \operatorname{rank} A = 1$
- $\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = 1 = \operatorname{rank} A = 1$

非正則な A に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を「解け」

「集合 $\{\boldsymbol{x} | f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$ を決定せよ」という意味
記号の濫用で，この集合を逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{b}\})$ と書くことがある 加藤 線形代数 p.191



$\xrightarrow{f}$



ケース 0 $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$

$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{smallmatrix}\right] \to \cdots \to \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

同次連立 1 次方程式だから解を持つのは当然 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69)

実際，$\mathrm{rank}\,[A|\boldsymbol{b}] = 1 = \mathrm{rank}\,A = 1$ より解あり．解の自由度は $2-1=1$.

加藤 線形代数 定理 3 – 2(p.65)

解は任意定数 1 個で，$\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] t \ (t \in \mathbb{R})$.

集合$=\{\boldsymbol{x} | \exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] t\}$=1 直線 m

図的解釈：

f は $\mathbb{R}^2$ を原点を通る 1 直線に「圧縮」する，

f は直線 m を 1 点 $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ に「圧縮」する．

同次連立 1 次方程式が常に自明な解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を持つのは，「原点 $\mathbf{0}$ を通る」1 直線への「圧縮」だから．

ケース 1 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.
$[A|\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
$\mathrm{rank}\,[A|\boldsymbol{b}] = 1 = \mathrm{rank}\,A = 1$ より解あり．解の自由度は $2 - 1 = 1$.

加藤 線形代数 定理 3 – 2(p.65)

解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t \ (t \in \mathbb{R})$.
集合=$\{\boldsymbol{x} | \exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t\}$=1 直線 m'(ケース 1 の直線 m を平行移動したもの).

図的解釈：
f は $\mathbb{R}^2$ を 1 直線に「圧縮」する，
f は直線 m' を 1 点 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ に「圧縮」する，

ケース 2 $\boldsymbol{b} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.
$[A|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
$\operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}] = 2 > \operatorname{rank} A = 1$ より解なし. 加藤 線形代数 定理 3 – 2(p.65)
集合$=\emptyset$

図的解釈：直線 ℓ に属さない $\boldsymbol{b}$ を選んでも戻せない.

$n - \mathrm{rank}\, A =$ 解の自由度
「次元」＝パラメタ表示するのに必要な任意定数の個数．正確な定義は

線形代数☆演習 II(2024)L

準同型定理 (代数入門)

A	n 全体 $\mathbb{R}^n$ の「次元」	$\mathrm{rank}\, A$ 像 $f(\mathbb{R}^n)$ の「次元」	解の自由度 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解全体の集合
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	2	2	0
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$	2	1	1
O	2	0	2
	全体	「残る分」	「圧縮」される分

線形代数☆演習 I(2023)LL19

加藤 線形代数 定理 2-9(p.217)

$n = 3$ なら，非正則行列に，階数 $\mathrm{rank}\, A = 0, 1, 2$ の 3 パターンがある．
レポート TrialL20 裏では，$n = 3$ で，逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{b}\})$ が，平面になったり直線になったりしてた．

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

用途:Moodle「成績評価方法」参照.

- 2024-08-02 金 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- TrialL01-15 の出題計画をあわせたもの．要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし．ただし，災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2024-08-06).

成績評価

- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2024-07-26 金 20:00 までに提出.
- TrialL29 までの採点結果の公表は，2024-07-31 ごろまでに公表する予定.