3 次の行列式と体積拡大率

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L30(2024-07-26 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2024-07-26 Fri 07:14 JST hig"

今日の目標

- スカラー 3 重積と 3 次の行列式との関係を説明できる
- 3 次の行列式で平行六面体の体積と 1 次変換の体積拡大率を求められる
- 3 次元の簡単な 1 次変換で像と逆像を求められる

ここまで来たよ

非/正則な行列で表される 1 次変換

1 次変換 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を表す n 次正方行列 A.

- $n = 2$
  - A 正則
    - ★ 面積拡大率 $\det(A) \neq 0$. 平行四辺形を平行四辺形に写す. $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ に写す.
  - A 非正則
    - ★ 面積拡大率 $\det(A) = 0$. 平行四辺形は「つぶれる」. $\mathbb{R}^2$ は 1 点または 1 直線に写る. $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ の解は…
- $n = 3$
  - A 正則
    - ★ 体積拡大率 $\det(A) \neq 0$. 平行六面体を平行六面体に写す. $\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ に写す.
  - A 非正則
    - ★ 体積拡大率 $\det(A) = 0$. 平行四辺形は「つぶれる」. $\mathbb{R}^3$ は 1 点または 1 直線または 1 平面に写る. $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ の解は…
- n 一般

簡単な非正則行列で表される 3 次元の 1 次変換の像と逆像

L30-Q1

Quiz(3 次元の 1 次変換)

$\mathbb{R}^3$ の 1 次変換 f は，行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, で表される

1. 像 $f(\mathbb{R}^3)$ を求めよう．
2. $\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_1$ となる $\boldsymbol{x}$ 全体の集合 (逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{b}_1\})$) を求めよう．
3. $\boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_2$ となる $\boldsymbol{x}$ 全体の集合 (逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{b}_2\})$) を求めよう．

一般の A では，像の方はこんなに簡単にはわからない．

例題 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ による $\mathbb{R}^3$ の像は $\left\{ \begin{bmatrix} 3s+t+u \\ 2s+t+2u \\ s+t+3u \end{bmatrix} \middle| s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$.

これは，$\mathbb{R}^3$ ではなく，実は 1 平面．このことは実は rank A からわかる．

待て線形代数 II 線形独立性基底

L19 再掲:3 元連立 1 次方程式の解の集合（空間内の）

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (空間内の点) で, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解があるとき $(\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A})$.
$\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$. 線形代数☆演習 I(2024)L06 teamL06 TrialL20 裏

A の階数は 3, 解の自由度 0, 解は一意に定まる, 解全体の集合は 1 点,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 11 \end{aligned} \rightsquigarrow 1\text{ 点}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

A の階数は 2, 解の自由度 1, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 直線. 加藤 線形代数 p.183

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - 7c \\ x_2 &= 3 - 9c \\ x_3 &= c \end{aligned} \rightsquigarrow 1\text{ 直線}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

A の階数は 1, 解の自由度 2, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は 1 平面. 加藤 線形代数 p.184

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 &= 2 - 5c - 3d \\ x_2 &= c \\ x_3 &= d \end{aligned} \rightsquigarrow \text{平面}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

A の階数は 0, 解の自由度 3, 無限個の解が存在する, 解全体の集合は空間全体.

$$\tilde{A} = O$$

ここまで来たよ

復習

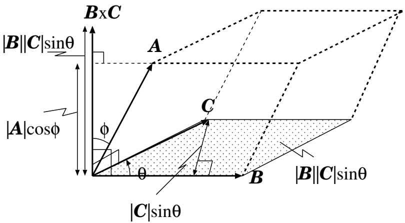
外積 線形代数☆演習 I(2024)L02 加藤 線形代数 p.265-266

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

筆算
$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1\\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2\\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3\\ & a_1 & b_1\\ & a_2 & b_2\end{array}$$

スカラー 3 重積 線形代数☆演習 I(2022)L03

外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトル.
ということは, 内積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ はスカラー (1 個の実数) になる.
図形的に考えると, 絶対値 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする 平行六面体の体積.
右の図は $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}$ を描いている.



平行六面体の体積とスカラー 3 重積と行列式の図形的意味

加藤 線形代数 なし

3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を並べた 3 次正方行列の行列式は, スカラー 3 重積, すなわち, 平行六面体の符号付き体積に等しい

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det[\boldsymbol{abc}]$$

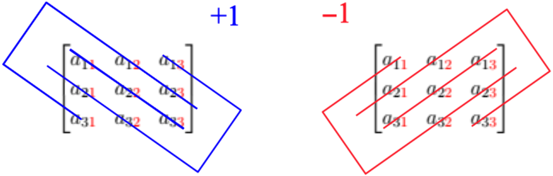
実は, n 次正方行列の行列式 $\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ は
$\mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を辺とする n 次元の '平行 $2n$ 面体' の符号付き体積.

行列式は行列の「大きさ」のようなもの

復習: サラスの公式 線形代数☆演習 I(2024)L23

例 $n = 3$ 加藤 線形代数 練習 2(p.109), 章末問題 3(2)(p.133) $3! = 6$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



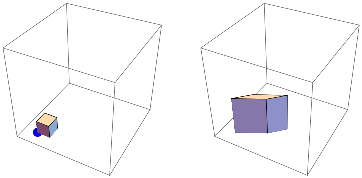
サラスの公式

加藤 線形代数 図 2(p.108)

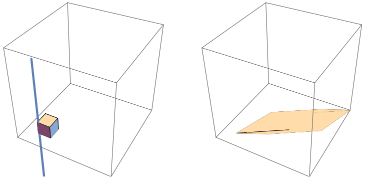
3 次の行列式は体積拡大率と思える

$A = [\boldsymbol{abc}]$ の表す $\mathbb{R}^3$ の 1 次変換 f により，
$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{a}$ に, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{b}$ に, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{c}$ に写る.
$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を 3 辺とする立方体は, 1 次変換 f により，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体, またはそれをつぶした平面, 直線, 点に写る.
行列式 $\det A$ は 1 次変換 f の拡大率 (裏返しなら負).

$A = \begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$
$\det A = 9$



$A = \begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&0\\3&2&0\end{bmatrix}$
$\det A = 0$ (平面につぶれる場合)



L30-Q2

Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

を 3 辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ の表す 1 次変換 f で写した.

$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の作る平行六面体，$f(\boldsymbol{b}_1), f(\boldsymbol{b}_2), f(\boldsymbol{b}_3)$ の作る平行六面体の体積を求めよう.

mobius L30

ここまで来たよ

L30-Q3

Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

L30-Q4

Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

$\mathbb{R}^3$ の原点 $\mathbf{0}$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ に平行な平面がある．
ベクトル $\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，平面に関して，一方の側を指している．

1. ベクトル $\boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ は，平面に平行か，$\boldsymbol{c}_1$ と同じ側を指すか，もう一方の側を指すか．
2. ベクトル $\boldsymbol{c}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は，平面に平行か，$\boldsymbol{c}_1$ と同じ側を指すか，もう一方の側を指すか．
3. ベクトル $\boldsymbol{c}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ は，平面に平行か，$\boldsymbol{c}_1$ と同じ側を指すか，もう一方の側を指すか．

mobius　L30

定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

用途:Moodle「成績評価方法」参照.

- 2024-08-02 金 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- TrialL01-15 の出題計画をあわせたもの．要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし．ただし，災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2024-08-06).

成績評価

- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2024-07-26 金 20:00 までに提出.
- TrialL29 までの採点結果の公表は，2024-07-31 ごろまでに公表する予定.

連絡

- trialL30-1 Mobius 問題 (Mobius L30 で練習の後に)Mobius の Trial で．L30 授業後，期限 2024-08-02 金 20:00
- trialL30-2 Moodle 作文 L30 授業後，期限 2023-08-02 水 20:00
- アンケート
- 2024-08-02 金 1 任意参加小テスト
- 2024-08-02 金 20:00 までの すべての Mobius 課題の取組状況を科目の成績に算入します
- 全学授業アンケート
- 教科書は (少なくとも) 卒業まで売らないで
- 2024 年度後期数理情報基礎演習，2025 年度前期 確率統計 I でまたお会いしましょう（たぶん）