# ベクトルの演算

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L01(2025-04-09 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-09 Wed 19:34 JST hig"

今日の目標

- 授業の到達目標/合格条件を説明できる
- Mobius で学習できる
- 2,3 次元ベクトルの (成分表示によらない, 絵による) 演算ができる 石村畑 線形代数 §1.1

# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?

1 ベクトルの演算
  - ベクトルと演算
  - Mobius で問題演習

# 線形代数とは?

- 高校 数学 C ベクトルの続き. 2,3 次元でなく $n$ 次元. 行列 (例: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ ) も.
- 理系の学科はだいたい 1 年でやる.
- 線形代数と確率は人工知能, 機械学習の大前提.

## 線形代数☆演習 I の到達目標 (アバウト)

- シラバスより
  - 行列の基本的な計算ができる
  - 直線平面など図形や，**教科書に追加**移動や拡大縮小が行列で表現できる
  - 連立 1 次方程式を行列で表現し解くことができる
- 教科書解読ベースで大学の数学の学び方ができる
- 教科書の石村畑 線形代数 §1–4 の問題 (trial) が何も見ないで楽勝で解ける
- **教科書に追加**される内容の問題も何も見ないで楽勝で解ける

数理のカリキュラムの中での線形代数 I は必修. 後続 線形代数及び演習 II. 数学, 現象,DS, 情報科学ぜんぶで必要.

# 科目ののり

- 週 2 回水 1 金 1.
- ノート PC 持参. 問題を解くための手書きノート用意.
- 毎朝 9:15–9:25? の小テスト 'trial' をクリアしていく感じで.
- 次の情報基礎 (木 45) 以降, 連絡は Teams で.
- 次回から `https://hig3.net` → LearnMoodle

  `https://learn.hig3.net`
- 毎回出席を前提に進めます. 欠席の事前事後連絡不要. やむを得ない理由で欠席してピーナッツ的に成績的に考慮されたい場合は LearnMoodle 欠席届 (2 週後まで).
- テキスト必須 石村畑 すぐわかる線形代数 改訂新版 東京図書.

石村畑 線形代数 何ページの式 (99),§ 章 のように.

## 相談できるところ

- オフィスアワー樋口 前期木昼, 1-539 or Teams chat a00010
- 数理情報基礎演習 B, 金 3, 1-609. 履修登録してもしてなくても.
- Math ラウンジ (1 号館 5 階 1-536,538), だいたい昼休みは大学院生常駐. 数理 TM-Math ラウンジ ch on Teams.

## 科目の成績ののり (シラバスより)

*100* ピーナツ=小テスト *75* ピーナツ + 平常点 *25* ピーナツ

全学ルールで 60 ピーナツ以上が合格です (履修要項参照). 成績は研究室配属や奨学金に影響することがあります.
(詳細)

小テスト *75* ピーナツ=*Trial*=前半 *15* 回 $\times 2$+ 後半 *15* 回 $\times 3$.
平常点 *25* ピーナツ=*Mobius*+チーム課題+その他

データ取得ののり研究と授業改善のため，Mobius, Moodle そのほか Web での活動データを記録させていただきます．個人が特定できない形で使用します．使用されないことを希望する人は，近々あるアンケートでオプトアウトできるようにします（それまでは使用しません）.

# ここまで来たよ

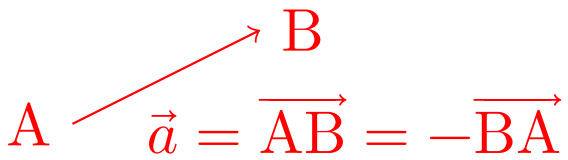

- はじめに
  - この授業どんなのり?

1. ベクトルの演算
   - ベクトルと演算
   - Mobius で問題演習

# ベクトルとは 石村畑 線形代数 §1.1.1

## 定義 (ベクトル 石村畑 線形代数 p.2)

平面上の，2 点を結ぶ矢印 AB をベクトルといい，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す．
点 A: 始点, 点 B: 終点
線分 AB の長さ: ベクトルの大きさ, 長さ, 絶対値 **教科書に追加**
平行移動して重なるベクトルは同じベクトルとみなす．




## 定義 (逆ベクトル・零ベクトル 石村畑 線形代数 p.2)

石村畑 線形代数 p.2 参照.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の 逆ベクトル $-\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$, 零ベクトル $\vec{0}$

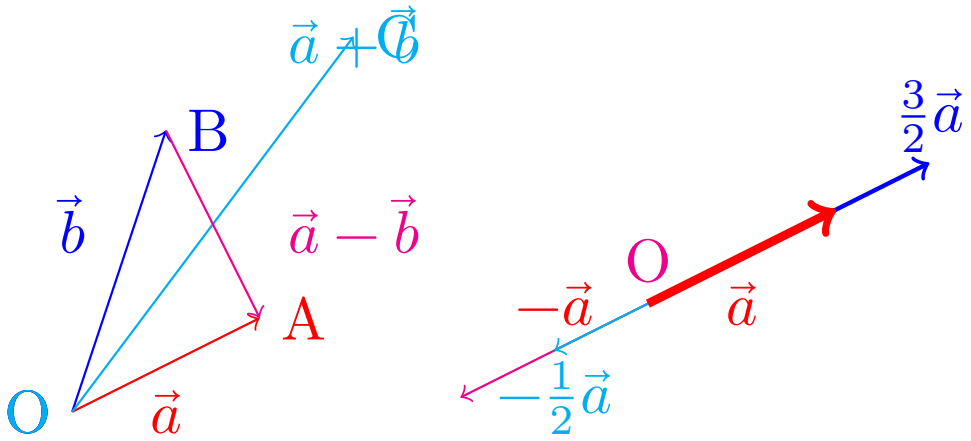
## 定義 (ベクトルの和・差・実数倍 石村畑 線形代数 p.3)

石村畑 線形代数 p.3 参照

和 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$.

差 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

実数倍 $k\overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\vec{a}$, $k$ は実数.




差 $\vec{a} - \vec{b}$ は，逆ベクトルとの和 $\vec{a} + (-\vec{b})$ と定義される.

実数倍を 教科書に追加 スカラー倍とも言う.

うまくいってる！ 逆ベクトル $-\vec{a}$ と $(-1)$ 倍 $(-1) \times \vec{a}$ は等しい.

## 記号 石村畑 線形代数 p.4

記号 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$. 自由なアルファベットを使ってよい．$\boldsymbol{a}$ のように太字や二重縦線で書く流儀もある．
ベクトルの長さ，大きさ，絶対値 $s = |\vec{a}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$.

## 命題 (ベクトルの演算の性質 石村畑 線形代数 p.4)

石村畑 線形代数 p.4参照．

ここにミスプリントがひとつ．教訓…

# ベクトルの内積 石村畑 線形代数 p.4

## 定義 (ベクトルの内積 石村畑 線形代数 p.4)

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を $\theta$ とするとき，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ とは次の実数である．

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\theta.$$

この「$\cdot$」は，省略したり，$\times$ で代用したりしてはいけない．

### 弧度法

**教科書に追加** 大学では度（$0^\circ = 360^\circ$）は使わない．弧度法（ラジアン radian）のみ．$180^\circ = \pi\ \mathrm{rad}$.

## 命題 (内積の性質 石村畑 線形代数 p.5)

石村畑 線形代数 p.5 参照．

# ベクトルの垂直と平行 石村畑 線形代数 p.5

## 定義 (ベクトルの垂直と平行 石村畑 線形代数 p.5)

石村畑 線形代数 p.5 参照.

## 定義 (ベクトルの垂直と平行の同値条件 石村畑 線形代数 p.5)

石村畑 線形代数 p.5 参照.

# 三角形の面積

## 定理 (三角形の面積 石村畑 線形代数 定理 1.1.1(p.6))

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ を 2 辺とする三角形 OAB の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2)^{1/2}.$$

# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?
- 1 ベクトルの演算
  - ベクトルと演算
  - Mobius で問題演習

# Mobius で問題演習

`https://mobius.st.ryukoku.ac.jp` または 龍谷 数学学習サポート で検索

Mobius にログイン. 初回はパスワードリセットが必要. 全学統合認証とは別のパスワードを設定.

フォローアップ課題 (もうすぐ期限) をやりたくなるけど, ぐっとこらえて線形代数.

Mobius はピーナツにカウントされます.

数式入力方法

| | 数式 | Mobius(Maple) |
|---|---|---|
| ベクトル | $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ | `<2,-3>` |
| 分数 | $\frac{355}{133}$ | `355/133` |
| 平方根 | $\sqrt{3}$ | `sqrt(3)` |
| 積 | $2\sqrt{3}$ | `2*sqrt(3)` |

mobius L00 で入力練習, mobius IH1 でベクトルの練習

# 次回

同じ教室．PC 持参．
Trial．出題計画は…
Mobius で練習しておいてね (最高点が記録)．今回は期限なし．

# ベクトルの成分表示

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L02(2025-04-11 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-11 Fri 07:46 JST hig"

今日の目標

- 成分でベクトルの演算を行える 石村畑 線形代数 §1.1.2
- Mobius の数式入力で学習できる
- LearnMoodle で学習できる

## Moodle

https://hig3.net 

→ LearnMoodle https://learn.hig3.net

→ 'Google account Ryukoku' に y25....@mail.ryukoku.ac.jp でログイン

→ 線形代数☆演習 (2025)

Moodle は Manaba の仲間. LMS=Learning Management System. 世界的には高等教育では Moodle のシェアが大きい.

# ここまで来たよ

1 ベクトルの演算

2 ベクトルの成分表示
- ベクトルの成分表示と演算

# ベクトルの表示 石村畑 線形代数 §1.1.2

ベクトルの始点を原点におく．

平面ベクトルを，終点の $x, y$ 座標を使って，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2, 5)$ のように書く．$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ のように書くこともある（教科書に追加 縦ベクトル，石村畑 線形代数 p.152 列ベクトル）石村畑 線形代数 p.6

空間ベクトルを，終点の $x, y, z$ 座標を使って，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (3, 2, 5)$ のように書く．$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ のように書くこともある（教科書に追加 縦ベクトル，石村畑 線形代数 p.152 列ベクトル）石村畑 線形代数 p.7

Mobius ではベクトル (,) のコンマ ‘,’ が表示されないことがあります．自分が入力するときは常に必要です．

# 単位ベクトル 教科書に追加

## 定義 (単位ベクトル 教科書に追加)

ベクトル $\vec{a}$ が $|\vec{a}| = 1$ であるとき, $\vec{a}$ は単位ベクトルであるという.

## 命題 (平行な単位ベクトルの求め方 教科書に追加)

ベクトル $\vec{a} \neq \vec{0}$ に対して, $\vec{a}$ に平行な単位ベクトルは $\pm\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ である.
特に, 同じ向きの単位ベクトルが $+\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, 逆向きの単位ベクトルが $-\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ である.

証明 …
直観的説明 …

# 3 次元の座標系と基本ベクトル 教科書に追加

## 定義 (基本ベクトル 教科書に追加)

平面ベクトル

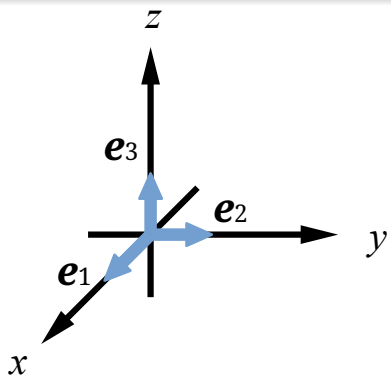
$$\vec{e}_1 = \vec{e}_{\mathrm{x}} = (1,0), \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_{\mathrm{y}} = (0,1)$$

を 2 次元の基本ベクトルという.

空間ベクトル

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_{\mathrm{x}} = (1,0,0), \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_{\mathrm{y}} = (0,1,0), \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_{\mathrm{z}} = (0,0,1)$$

を 3 次元の基本ベクトルという.




右手系

$x$ 軸は手前向け

## 命題 (基本ベクトルの性質)

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

基本ベクトルは座標軸に平行な単位ベクトルである

## 定義 (クロネッカーのデルタ記号 教科書に追加)

$$\delta_{ij} \overset{\text{定義}}{=} \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

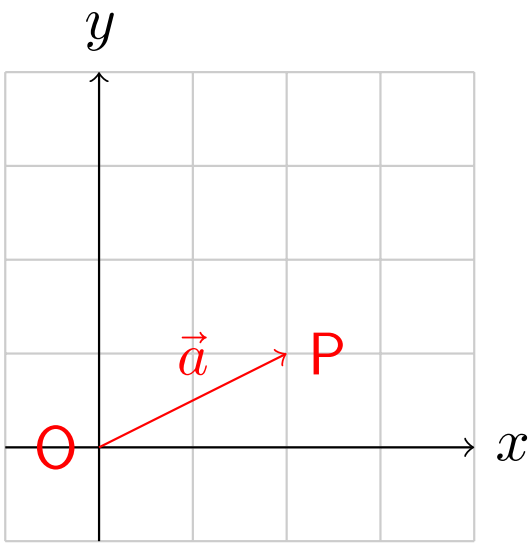
‘同じなら 1, 違ったら 0’

# ベクトルの演算の成分表示

## 命題 (ベクトルの演算の成分表示 石村畑 線形代数 p.6,p.7)

石村畑 線形代数 p.6,p.7 参照

始点 を O, 終点 を P とする矢印を, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という.
平行移動して重なるベクトルは同じ.

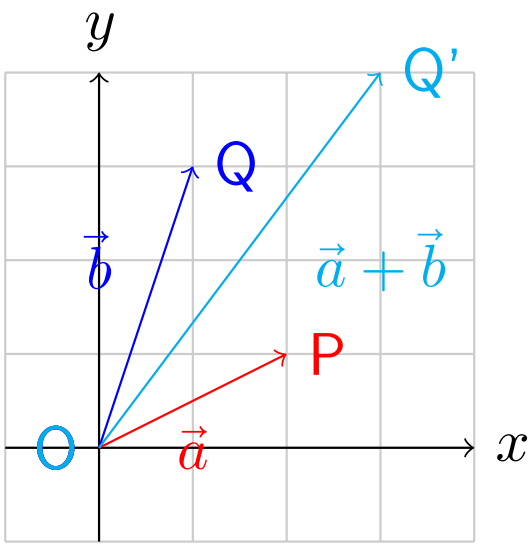



例えば $\mathrm{R}(2,5)$, $\mathrm{S}(4,6)$, なら,
$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \vec{a} = (2, 1)$ 2 が $x$ 成分, 1 が $y$ 成分.

# ベクトルの和

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2, 1)$,
$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ'}} = (1, 3)$
のとき, ベクトルの和 $\vec{a} + \vec{b}$ は

$\mathrm{OP}, \mathrm{OQ}$ を 2 辺とする平行四辺形を作って, もう 1 個の頂点を $\mathrm{Q}'$ とすると, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$




$\vec{a} + \vec{b} = (2, 1) + (1, 3) = (3, 4)$.
$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに加える.

# ベクトルの定数倍

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2, 1)$, 実数 $k = 3$ に対して, ベクトルの定数倍 $k\vec{a}$ は

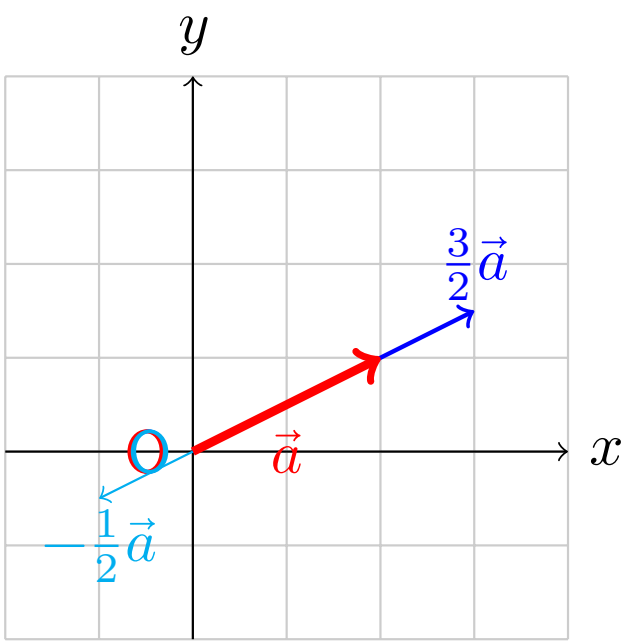
長さが $\vec{a}$ の長さの $|k|$ 倍のベクトルで,

$k > 0$ なら $\vec{a}$ と同じ向き, $k < 0$ なら $\vec{a}$ と逆向き (反対向き),

$k\vec{a} = k(2, 1) = (2{\cdot}k, 1{\cdot}k)$.

$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに $k$ 倍する.

$k = 0$ ならゼロベクトル $k\vec{a} = \vec{0} = (0, 0)$.



## 命題 (内積の成分表示 石村畑 線形代数 p.7)

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

### 証明

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} =& (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\
=& a_1 \vec{e}_1 \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) + a_2 \vec{e}_2 \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\
=& a_1 b_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 a_2 b_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \\
=& a_1 b_1 + 0 + 0 + a_2 b_2.
\end{aligned}$$

L02-Q1

## Quiz(ベクトルの内積)

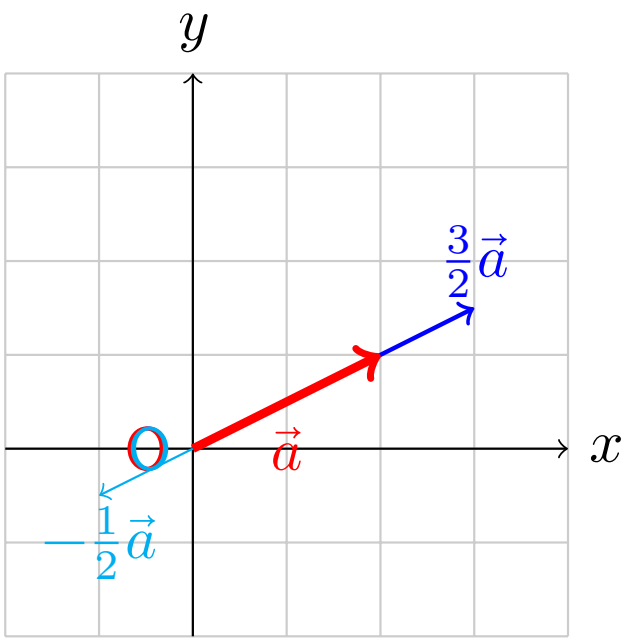
$\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (30, 10)$ とする.

1. 内積 $\vec{a} \cdot \vec{a}$ を求めよう.
2. 絶対値 $|\vec{b}|$ を求めよう.
3. 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよう.
4. 内積 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$ を求めよう.

# ベクトルの平行

$\vec{a}$ と $\vec{b}(\neq \vec{0})$ に対して，
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\theta = 0$（同じ向き）または $\theta = \pi$（逆向き）であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であるという．

ある実数 $k$ が存在して $k\vec{a} = \vec{b}$ とかけることをいう．
$\vec{a}, \vec{b}$ は，$k > 0$ なら同じ向き，$k < 0$ なら逆 (の) 向きという．



# ベクトルの直交

石村畑 線形代数 §6.1(p.200)

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 $\theta$ が $\pi/2$ であるとき，または，$\vec{a} = \vec{0}$ または，$\vec{b} = \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交するという．
垂直との違いは？

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交するという．

# 空間ベクトルの外積

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L03(2025-04-16 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-16 Wed 13:32 JST hig"

## 今日の目標

- **教科書に追加** 3 次元のベクトルの外積が計算できて利用できる
- 石村畑 線形代数 定理 1.1.1 2 辺のベクトルから三角形，平行四辺形の面積が計算できる

L02-Q1

## Quiz 解答: ベクトルの内積

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 5.$
2. $|\vec{b}| = (\vec{b} \cdot \vec{b})^{1/2} = 1000^{1/2} = 10\sqrt{10}.$
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 30 + (-2) \cdot 10 = 10.$
4. $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 10 + 10 = 20.$

# 三角形の面積

## 定理 (三角形の面積 石村畑 線形代数 定理 1.1.1(p.6))

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ を 2 辺とする三角形 OAB の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2)^{1/2}.$$

2,3 次元で成立する.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形 OABP の面積 $S'$ は
$S' = 2S = (|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2)^{1/2}$.

# ここまで来たよ

2 ベクトルの成分表示

3 空間ベクトルの外積
- 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

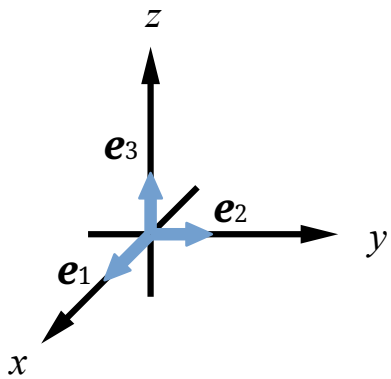
# 3 次元の座標系と基本ベクトル (復習)

## 定義 (基本ベクトル)

3 次元の

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_{\mathrm{x}} = (1,0,0), \vec{e}_2 = \vec{e}_{\mathrm{y}} = (0,1,0), \vec{e}_3 = \vec{e}_{\mathrm{z}} = (0,0,1)$$

の 3 つの単位ベクトルを基本ベクトルという.




右手系

$x$ 軸は手前向け

$x$: 親指, $y$: 人差し指, $z$: 中指

# 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

## 定義 (外積)

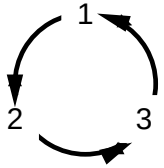
2 つの 3 次元ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ のことを外積という.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

この記号 '$\times$' は新しい記号. (実数の 'かける' とたまたま同じ文字).

1 成分覚えれば, あとは, $1, 2, 3$ つまり $x, y, z$ が循環的 (cyclic) に入れ替わってることに注意.

$1 \to 2 \to 3 \to 1$.



## 基本ベクトルを使った別の書き方

$$\begin{aligned}&(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)\\ \overset{!}{=}&(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3\end{aligned}$$

例 $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3.$

## 外積の成分表示の覚え方

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} =&(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)\\ =&(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2\end{array}$$

L03-Q1

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

1. 外積 $(1,3,-2)\times(-6,4,-5)$ を求めよう.
2. 外積 $(-6,4,-5)\times(1,3,-2)$ を求めよう.
3. 外積 $(-6,4,-5)\times(-6,4,-5)$ を求めよう.

mobius　IH1.5

## 命題 (外積の性質 (石村畑 線形代数 内積の性質 (p.5) と対照して)

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 $k$ に対して，次の性質が成り立つ．

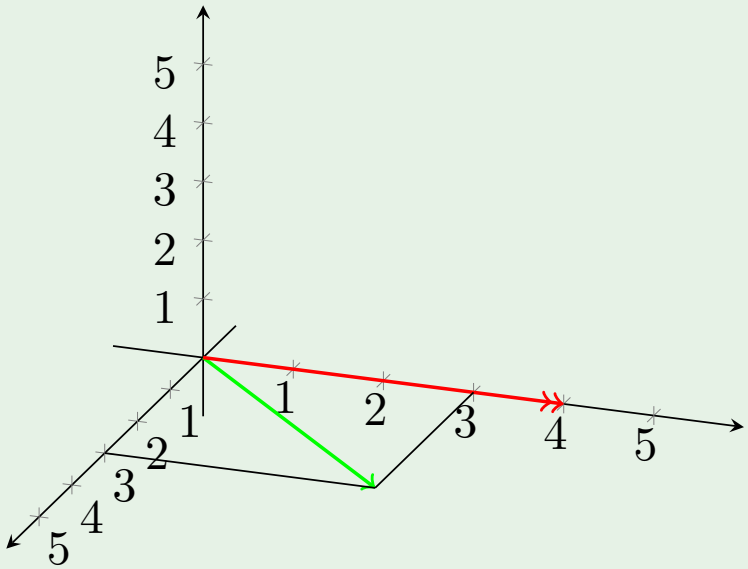
1. 大注意 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, よって $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
2. 分配法則 $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
3. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$.

計算例 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0} - \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b}$

L03-Q2

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

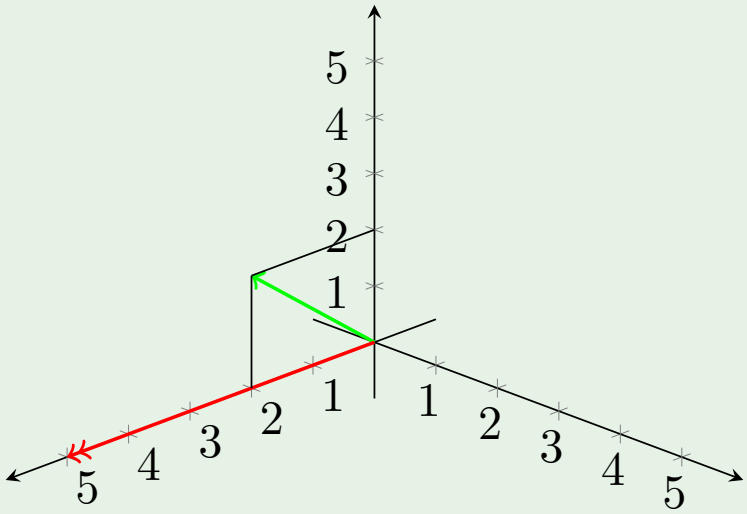
図で，左向きが $x$, 右向きが $y$, 上向きが $z$ 軸で，$xyz$ 座標は右手系である．緑のベクトルを $\vec{a}$, 赤のベクトルを $\vec{b}$ とする．
外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を，(1) 定義にしたがった成分計算で (2) 絶対値と向きの性質から，求めて図に描こう．



L03-Q3

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

図で，左向きが $x$, 右向きが $y$, 上向きが $z$ 軸で，$xyz$ 座標は右手系である．緑のベクトルを $\vec{a}$, 赤のベクトルを $\vec{b}$ とする．
外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を，(1) 定義にしたがった成分計算で (2) 絶対値と向きの性質から，求めて図に描こう．



# 外積の性質

## 外積の絶対値

絶対値は，$\vec{a}, \vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積

なぜなら，

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$
$$= \cdots = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$
$$= |\vec{a}|^2|\vec{b}^2| - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2\theta.$$

## 外積の向き

$\vec{a} \times \vec{b}$ は，$\vec{a}$ とも $\vec{b}$ とも直交する

なぜなら，

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0.$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0.$

向きは 2 つあるけど，どっち向き？ $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ から，右手で，

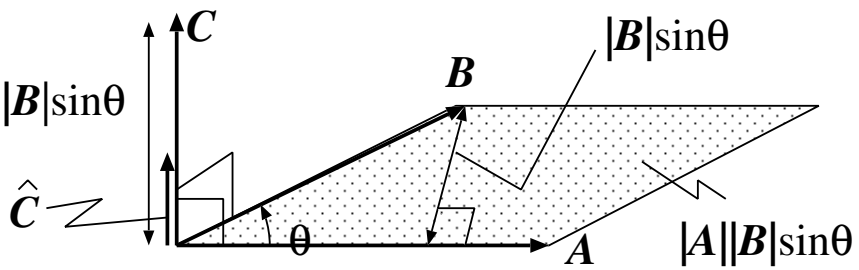
$\overrightarrow{\text{親指}} \times \overrightarrow{\text{人差指}} = \overrightarrow{\text{中指}}.$

# 外積の図形的な意味

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ (\sin\theta)\ \vec{e}_{\mathrm{c}}}$$

ただし, $\vec{e}_{\mathrm{c}}$ は, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルで, $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{e}_{\mathrm{c}} \rangle$ が右手系をなす ( 右手の形 $\langle$親指, 人差指, 中指$\rangle = \langle \vec{e}_{\mathrm{x}}, \vec{e}_{\mathrm{y}}, \vec{e}_{\mathrm{z}} \rangle$ を $\pi$ を越えて開かずに得られる) もの.

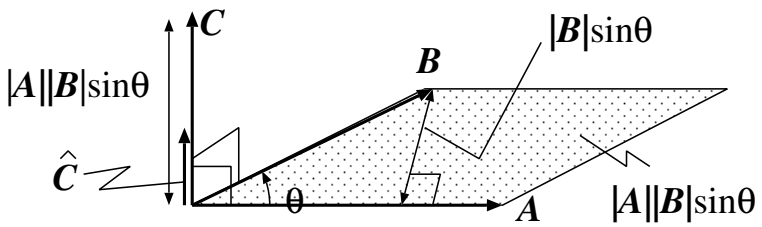
別の言い方 $\vec{c}$ の向きは, $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に回る右ねじが進む向き.



## 外積ってけっきょく何?

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のはった網みたいなもの

- 2 本の棒 $\vec{a}, \vec{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり 平行四辺形の面積 が $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- 剛体の力学のトルク=力のモーメント $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$.



L03-Q4

## Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $(1, 2, 1)$
- 人差し指に向かうベクトルが $(3, -2, 0)$
- 中指に向かうベクトルが $(-1, -2, 3)$

だった.
この手は右手か左手か.

# 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L04(2025-04-18 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-18 Fri 07:34 JST hig"

## 今日の目標

- **教科書に追加** 3 次元のベクトルのスカラー 3 重積が計算できて利用できる
- **教科書に追加** 平行四辺形の面積，平行六面体の体積を計算できる
- **教科書に追加** 外積，スカラー 3 重積の図形的意味を説明で

L03-Q1

## Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積

1. $(1,3,-2)\times(-6,4,-5)=$
   $(3\cdot(-5)-4\cdot(-2),-2\cdot(-6)-(-5)\cdot 1,1\cdot 4+(-6)\cdot 3)=(-7,17,22).$
2. $-(-7,17,22).$
3. $\vec{0}.$

L03-Q2

## Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積　　$\vec{a}\times\vec{b}=(0,0,12)$

L03-Q3

## Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積　　$\vec{a}\times\vec{b}=(0,10,0)$

# ここまで来たよ

3 空間ベクトルの外積

4 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味
- 外積の応用
- スカラー 3 重積

## L04-Q1

### Quiz(2 つのベクトルに垂直なベクトル)

2 つのベクトル $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (12, -8, 0)$ を考える.

1. $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを 1 つ求めよう.
2. $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{c}$ をすべて求めよう.
3. 上で求めた単位ベクトル $\vec{c}$ について，$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ は右手，左手のどちらの親指，人差し指，中指に重ねられるか答えよう.

L04-Q2

## Quiz(3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

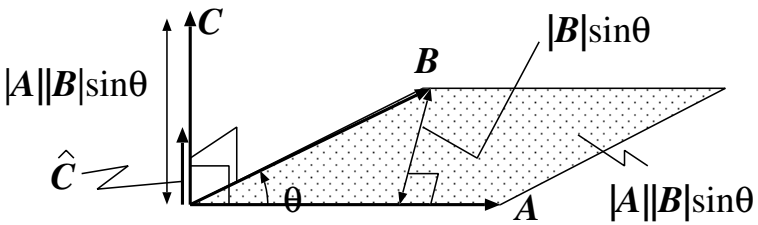
- 親指に向かうベクトルが $(1, 2, 1)$
- 人差し指に向かうベクトルが $(3, -2, 0)$
- 中指に向かうベクトルが $(-1, -2, 3)$

だった.
この手は右手か左手か.

## 外積ってけっきょく何?

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のはった網みたいなもの

- 2 本の棒 $\vec{a}, \vec{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり平行四辺形の面積が $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- 剛体の力学のトルク=力のモーメント $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$.



# ここまで来たよ

3 空間ベクトルの外積

4 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味
- 外積の応用
- スカラー 3 重積

# スカラー 3 重積

ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ など.
対比して，1 個の実数 $k$ をスカラーという．絶対値 $|\vec{a}|$ はスカラー.

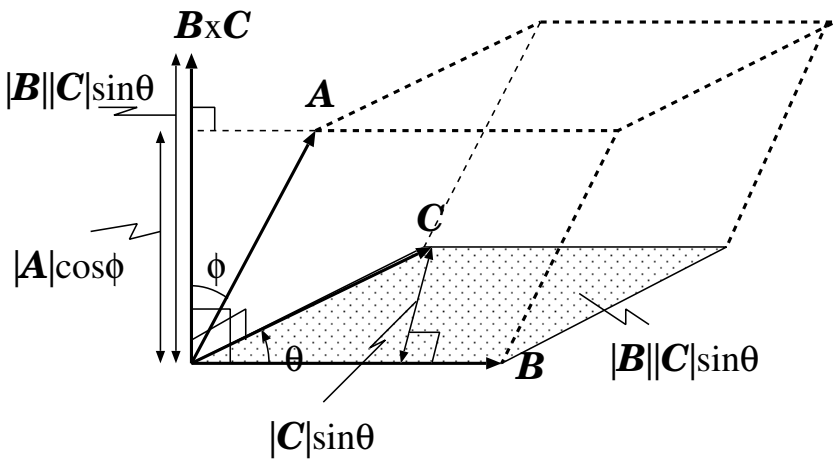
外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

## 定義 (スカラー 3 重積 教科書に追加)

空間ベクトルの順序付きの 3 個組 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して，
実数 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
をスカラー 3 重積という.
($|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ ともかく．この縦棒は絶対値とは別の記号)

図形的に考えると, スカラー三重積は，$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積.

$$
\begin{aligned}
\text{高さ} \times \text{底面積} &= |\vec{a}\cos\phi| \times |\vec{b} \times \vec{c})| \\
&= |\vec{a}\cos\phi| \times |\vec{b} \times \vec{c})| \\
&= |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|
\end{aligned}
$$



# スカラー 3 重積の筆算

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) \cdots \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

L04-Q3

## Quiz(内積・外積・スカラー 3 重積)

ベクトル $\vec{a} = (0, 1, 3), \vec{b} = (1, 3, 0), \vec{c} = (1, -2, 3)$ を考える.

1. $\vec{b}, \vec{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を，外積で求めよう.
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を，スカラー 3 重積で求めよう.

## L04-Q4

### Quiz(ベクトルとスカラーの演算)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を 3 次元ベクトル, $k$ をスカラー (ふつうの 1 個の実数のこと) とする.
次の式 (の計算結果) を, スカラー, 3 次元ベクトル, 間違った式に分類しよう.

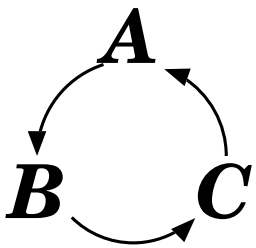
1. $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
3. $(\vec{a} \cdot k) \times \vec{b}$
4. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot k\vec{c}$
5. $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$

# スカラー・ベクトルに対する演算

| | | 空白 | $\cdot$ | $\times$ |
|---|---|---|---|---|
| スス | $k?m$ | | | |
| スベ | $k?\vec{a}$ | | | |
| ベベ | $\vec{a}?\vec{b}$ | | | |

# 右手系左手系

体積だから, 絶対値 $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$ は, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の順序を変更しても等しい.
じゃあ絶対値を取る前の符号は等しい?
実は, 順序を循環的に変えたときは $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ の符号も同じ.




1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号が逆になる.
右手の指で言うと, **中** $\cdot$ (**親** $\times$ **人**) $>0$.
右手系の座標系では $\vec{e}_z\cdot(\vec{e}_x\times\vec{e}_y)>0$.
符号つき体積

行列式 石村畑 線形代数 §3

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=-1\times(-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-1\times\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}).$$

## 定義

空間ベクトルの，順序つきの組 $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ が右手系とは，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を右手の親，人，中指に重ねられることをいう．左手系とは…

## 命題

空間ベクトルの，順序つきの組 $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ は，線形独立 石村畑 線形代数 p.13 ならば，右手系，左手系のいずれか一方に分類される．

## 命題

空間ベクトルの，順序つきの組 $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ は，線形独立 石村畑 線形代数 p.13 ならば，$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ である．$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$ ならば右手系，$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) < 0$ ならば左手系である．

# 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L05(2025-04-23 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-23 Wed 13:01 JST hig"

## 今日の目標

- 石村畑 線形代数 §1.3 平面上の直線のパラメタ表示，法線によるベクトル方程式が書ける
- **教科書に追加** 平面ベクトルに垂直なベクトルが求められる
- **教科書に追加** 点が直線上にあるかを判定できる

## L04-Q1

## Quiz 解答:2 つのベクトルに垂直なベクトル

1. $\vec{d} = \vec{a} \times \frac{1}{4}\vec{b} = (2, 3, -8)$.
2. $\vec{c} = \pm\frac{1}{|\vec{d}|}\vec{d} = pm\frac{1}{\sqrt{77}}(2, 3, -8)$.
3. $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{77}}(2, 3, -8)$ は，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ と同じ向きなので，外積の向きの性質より，右手の中指に重ねられる．
   $\vec{c} = -\frac{1}{\sqrt{77}}(2, 3, -8)$ は，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ と逆向きなので，左手の中指に重ねられる．

L04-Q2

Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積　　右手の中指の理想的な (親指人差し指と直交する) 向きは，$(1,2,1)\times(3,-2,0)=(2,3,-8)$. 右手だとする．このとき，上で求めた向きと，問題文の実際の右手中指の向きのなす角は $\frac{\pi}{2}$ 未満であるはず．
しかし，内積 $(2,3,-8)\cdot(-1,-2,3)<0$ なので，矛盾．よって左手．

L04-Q3

Quiz 解答: 内積・外積・スカラー 3 重積

1. $\vec{b}\times\vec{c}=(9,-3,-5)$. 面積は $|\vec{b}\times\vec{c}|=\sqrt{115}$.
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-18$. 体積は $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=18$.

emark 内積 $\cdot$, 外積 $\cdot$ の記号を正しく使い分けよう．

emark 数学では，$=$ は，両辺が等しいという記号で，「次に」のような記号ではない．
$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|0\cdot 9+1\cdot(-3)+3\cdot(-5)|=|-18|=18$ はよいが，$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|0\cdot 9+1\cdot(-3)+3\cdot(-5)|=|-18|=18$ のように途中で絶対値記号を加筆したものは誤り．最初の等号が成立していない．

L04-Q4

## Quiz 解答: ベクトルとスカラーの演算

1. へん
2. スカラー
3. ベクトル
4. スカラー
5. ベクトル

# ここまで来たよ

4 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味

5 直線のパラメタ表示とベクトル方程式
- 位置ベクトル
- 直線のパラメタ表示と方程式

# 位置ベクトル 石村畑 線形代数 §1.2

## 定義 (位置ベクトル 石村畑 線形代数 §1.2)

平面または空間で，原点 O を固定すると，点 A とベクトル $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ が 1 対 1 に対応する．ベクトル $\vec{a}$ を 点 A の位置ベクトルという．

点 A のかわりにベクトル $\vec{a}$ の言葉で記述することがある．
平行四辺形の面積 線形代数☆演習 I(2025)L03，平行六面体の体積 線形代数☆演習 I(2025)L04 は，すでにそういうのりで話してた．

# 内分点外分点

## 命題 (内分, 外分 石村畑 線形代数 p.12,p.13)

2 点 A, B の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ とする.
辺 AB を $m : n$ に内分する点 P の位置ベクトルは,

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n},$$

辺 AB を $k : (1-k)$ に内分する点 P の位置ベクトルは,

$$\vec{p} = (1-k)\vec{a} + k\vec{b}.$$

辺 AB を $m : n$ に外分する点 Q の位置ベクトルは,

$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}.$$

いくつかの憶え方, $k = \frac{m}{m+n}$. $k = 0, 1$.

# ここまで来たよ

4 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味

5 直線のパラメタ表示とベクトル方程式
- 位置ベクトル
- 直線のパラメタ表示と方程式

# 平面内の直線のパラメタ表示 石村畑 線形代数 p.16

## $\vec{a}$ を通り $\vec{d}(\neq \vec{0})$ に平行な直線のパラメタ表示

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$$

すなわち $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ $\quad (t \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

$\vec{d}$ を直線の方向ベクトル 石村畑 線形代数 p.16, 接 (線) ベクトル 教科書に追加という.

- 理由: チェック 1 $\vec{a}$ を通る
- 理由: チェック 2 $\vec{d}$ に平行である

「動点」$\vec{p}$ の変数名として，$\vec{r}$(特に物理), $\vec{x} = (x, y)$ もよく使われる.
$\vec{p} = (x, y), \vec{d} = (d_1, d_2)\vec{a} = (a_1, a_2)$ として成分で書くと,

$$x = a_1 + d_1 t$$

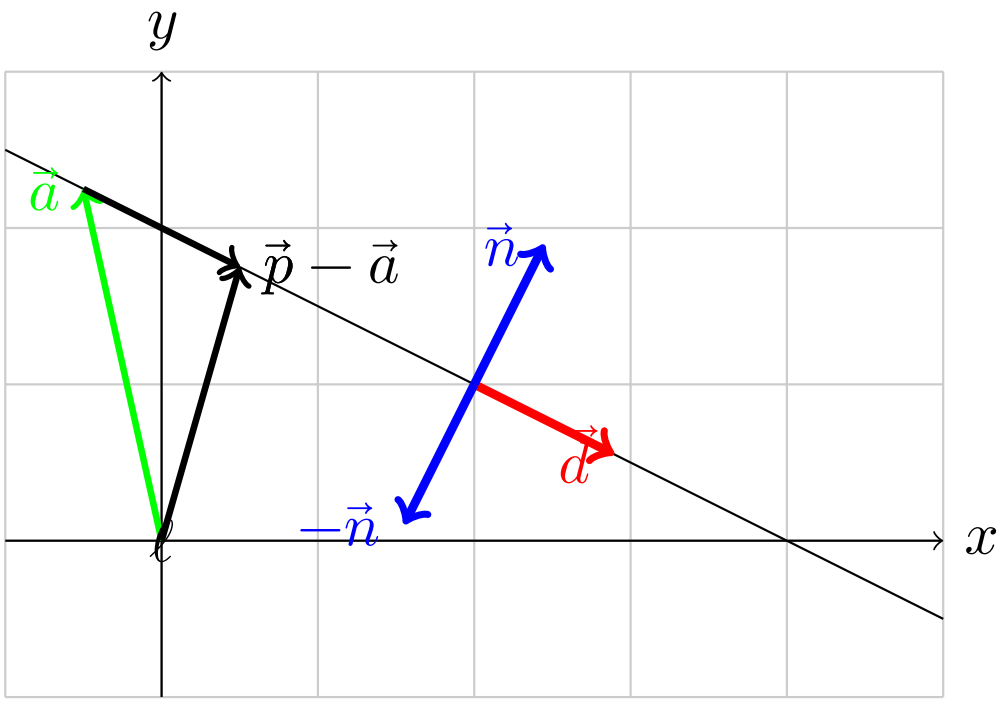
$$y = a_2 + d_2 t$$

# パラメタ表示とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$$

$\vec{a}, \vec{d}$ を固定して, $t$ を実数全体を動かしたとき, $\vec{a} + t\vec{d}$ は直線全体を動く.
このとき, $\vec{a} + t\vec{d}$ を直線のパラメタ (媒介変数) 表示, $t$ をパラメタ (媒介変数) という.
$\mathbb{R}$ 実数全体, $\mathbb{R}^2$ 2 次元ベクトル全体=平面

1 つの直線には複数の媒介変数表示がある.
例: $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}, \vec{x} = \vec{a} + t(2\vec{d}), \vec{x} = \vec{a} + t(-\vec{d}), \vec{p} = \vec{a} - \vec{d} + t\vec{d}$ はすべて同じ直線を表す.




GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

平面内の直線のパラメタ表示

`https://www.geogebra.org/m/skj88vSN`

L05-Q1

## Quiz(直線のパラメタ表示)

ベクトル $\vec{d} = (3, 1)$ に平行で, 点 $\vec{a} = (5, 7)$ を通る直線を考える.
直線のパラメタ表示を何個か作ろう（ベクトルで）.

mobius IH1.3

## 点が, パラメタ表示された直線上にあるかどうかの判定

点 $\vec{p}_0$ と, パラメタ表示された直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ を考える.
$\vec{p}_0 = \vec{a} + t\vec{d}$ となる $t$ がひとつでも存在すれば，すなわち，この $t$ についての方程式に解 $t$ が存在すれば，$\vec{p}_0$ は直線上にある.

L05-Q2

## Quiz(直線のパラメタ表示)

次のパラメタ表示を持つ平面上の直線を考える.

$$(x, y) = (1, 8) + (2, 5)t. \quad (t \in \mathbb{R})$$

点 $(0, 0), (5, 29), (5, 18)$ はそれぞれ直線上にあるか，判定しよう.

mobius IH1.3

# 平面上の直線の，法線ベクトルを用いたベクトル方程式

## $\vec{a}$ を通り $\vec{n}(\neq \vec{0})$ に垂直な直線のベクトル方程式 石村畑 線形代数 p.17

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0.$$

$\vec{n}$ を直線の法 (線) ベクトル 石村畑 線形代数 p,17 という.

- 理由: チェック 1 $\vec{a}$ を通る
- 理由: チェック 2 $\vec{n}$ に垂直である

$\vec{a} \cdot \vec{n} = C$ (実数の定数) とおくと,

$$\vec{n} \cdot \vec{p} - C = 0. \qquad (C\text{は定数})$$

$\vec{p} = (x, y), \vec{n} = (a, b)$ として成分で書くと,

$$ax + by - C = 0.$$

https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P

# 直線の方程式とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\vec{p} \in \mathbb{R}^2 | f(\vec{p}) = 0\}$$

となるような (条件) 式 $f(\vec{p}) = 0$ のこと.

直線には, 同値な複数の方程式の形がある.
例: $\vec{p} \cdot \vec{n} - C = 0$, $\vec{p} \cdot (2\vec{n}) - 2C = 0$, $\vec{p} \cdot (-\vec{n}) + C = 0$ はすべて同じ直線を表す.

L05-Q3

## Quiz(直線のベクトル方程式)

ベクトル $\vec{n} = (3, 1)$ に垂直で, 点 $\vec{a} = (5, 7)$ を通る直線を考える.
直線の方程式を求めよう.

mobius IH1.3

## 垂直なベクトル

$\vec{d} = (d_1, d_2)$ に垂直で同じ長さのベクトルは，$\pm\vec{n} = \pm(-d_2, d_1)$.

$\vec{n} = (n_1, n_2)$ とおいて，条件から決まる.
たしかに $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0, |\vec{d}| = |\vec{n}|$ になってる.

## 点が, 方程式で表された直線上にあるかどうかの判定

点 $\vec{p}_0$ と, 方程式 $f(\vec{p}) = 0$ を考える.
$f(\vec{p}_0) = 0$ が成立すれば $\vec{p}_0$ は直線上にある.

L05-Q4

## Quiz(直線の方程式と点)

次の平面上の直線の方程式を考える.

$$2x + 3y - 19 = 0.$$

点 $(0, 0), (5, 3)$ はそれぞれ直線上にあるか，判定しよう.

mobius IH1.3

# 直線の様々な表現

次のどれからどれにでも書き替えられるように.

- 通る点，…と平行
- 通る点，方向ベクトル
- パラメタ表示
- 通る点，…と垂直
- 通る点，法線ベクトル
- 法線ベクトルによるベクトル方程式

方向ベクトルと法線ベクトルはたがいに垂直

パラメタ表示から機械的に方程式を求める

パラメタ $t$ を消去する.

方程式から機械的にパラメタ表示を求める

いつでもうまくいく方法はない…

平面上の直線の場合はこの方法で.

$x$ 座標を $t$ とおいて $y$ 座標を $t$ で表す. $f(t)$ となったとする.

$$(t, f(t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が直線のパラメタ表示.

意味や図を考える方法

どちらで与えられるにせよ, いったん図を描き, その直線のパラメタ表示や方程式を考える.

直線の場合, 接線ベクトル $\vec{d} = (d_1, d_2)$ から, それに直交する法線ベクトルが $\vec{n} = (-d_2, d_1)$ と求める方法 (およびその逆) がある.

L05-Q5

## Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

1. 次のようにパラメタ表示される直線の，法線ベクトルを用いた方程式を求めよう.

$$(x, y) = (8, 11) + (2, -3)t \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. 次の方程式で表される直線のパラメタ表示を作ろう.

$$5x - 2y - 10 = 0$$

L05-Q6

## Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

1. ベクトル $\vec{d} = (3, 1)$ に平行で, 点 $\vec{a} = (5, 7)$ を通る直線のパラメタ表示と，法線ベクトルを用いた方程式を求めよう.
2. ベクトル $\vec{n} = (3, 1)$ に垂直で, 点 $\vec{a} = (3, 13)$ を通る直線のパラメタ表示と，法線ベクトルを用いた方程式を求めよう.

mobius IH1.3

石村畑 線形代数 問題 3(p.18), 演習 3(p.19)

# 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L06(2025-04-25 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-25 Fri 17:20 JST hig"

## 今日の目標



- 石村畑 線形代数 §1.4 空間内の直線のパラメタ表示が書ける
- 石村畑 線形代数 §1.4 空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式が書ける
- 石村畑 線形代数 §1.4 直線と平面の交点を求められる

## L05-Q1

### Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

パラメタ表示は

$$\vec{p} = (3,1)t + (5,7) \quad (t \in \mathbb{R}\text{はパラメタ})$$

## L05-Q2

### Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

$\vec{d} = (2,5), \vec{a} = (1,8)$ とする.

1. $\vec{a} + t\vec{d} = (0,0)$ となる $t$ が存在しないので, 直線上にない.
2. $\vec{a} + t\vec{d} = (5,29)$ となる $t$ が存在しないので, 直線上にない.
3. $t = 2$ とすると 、$\vec{a} + t\vec{d} = (5,18)$ となるので, 直線上にある.

L05-Q3

## Quiz 解答: 直線のベクトル方程式

方程式は,

$$(3,1)\cdot((x,y)-(5,7))=0$$

すなわち,

$$3x+y-22=0$$

L05-Q4

## Quiz 解答: 直線の方程式と点

1. 代入すると方程式が満たされないので, 直線上にない.
2. 代入すると方程式が満たされるので, 直線上にある.

L05-Q5

## Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

1. 接線ベクトルが $\vec{d} = (2, -3)$. これと直交する法線ベクトル $\vec{n} = (n_1, n_2)$ を $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\vec{n} = (3, 2)$ は法線ベクトル. よってベクトル方程式は

$$(3, 2) \cdot ((x, y) - (8, 11)) = 0.$$

2. 法線ベクトルは $\vec{n} = (5, -2)$. これと直交する接線ベクトル $\vec{d} = (d_1, d_2)$ を $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\vec{d} = (2, 5)$ は接線ベクトル.
また, 点 $\vec{a} = (2, 0)$ は直線上にあることがわかる.
よってパラメタ表示は

$$(x, y) = (2, 5)t + (2, 0) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

L05-Q6
Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

1. パラメタ表示は

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (t\text{はパラメタ})$$

2. 法線ベクトルのひとつは $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. よって, 直線の方程式は

$$\left(\vec{x} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$(x-5) - 3(y-7) = 0$$

3. 直線と平行なベクトルのひとつは $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. よってパラメタ表示は

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

方程式は

$$\left(\vec{x} - \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$3(x-3) + (y-13) = 0.$$

# ここまで来たよ

5 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式
- 平面上の直線の共有点
- 空間内の直線のパラメタ表示
- 空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

# 復習+例

平面上で考える.

$x$ 軸は直線

原点 $\vec{0} = (0,0)$ を通る. 方向ベクトルは $\vec{e}_x = (1,0)$, 法線ベクトルは $\vec{e}_y = (0,1)$.

$\rightsquigarrow$

パラメタ表示 $\vec{p} = \vec{0} + t\vec{e}_x = (t,0).\ (t \in \mathbb{R})$.

ベクトル方程式 $\vec{e}_y \cdot (\vec{p} - \vec{0}) = 0$ すなわち $0x + 1y = 0$.

$y$ 軸は直線

# 直線と直線の共有点 (両方がパラメタ表示のとき)

2 直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}(t \in \mathbb{R})$, $\vec{p}' = \vec{b} + s\vec{f}$ $(s \in \mathbb{R})$ 共通部分 $C$ を求めたい.
$C = \{\vec{a} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\} \cap \{\vec{b} + s\vec{f} | s \in \mathbb{R}\}$.
$\vec{q} \in C$ とすると,
$\exists s, t \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{q} = \vec{a} + t\vec{d} = \vec{b} + s\vec{f}$
成分表示すると,

$$\begin{aligned} a_1 + td_1 &= b_1 + sf_1 \\ a_2 + td_2 &= b_2 + sf_2 \end{aligned}$$

これを満たす $s, t$ を求めて，パラメタ表示に代入すればいい.

L06-Q1

## Quiz(パラメタ表示された直線の共通部分)

2 直線
$\vec{p} = (0, 2) + (3, -1)t \ (t \in \mathbb{R})$
$\vec{p} = (3, 0) + (6, -1)t \ (t \in \mathbb{R})$
の共通部分を求めよう．図を描こう．

石村畑 線形代数 問題 2, 演習 2(p.14,p.15)

# 直線と直線の共有点 (パラメタ表示と方程式のとき)

2 直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}(t \in \mathbb{R})$, $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ の共通部分 $C$ を求めたい.

方程式をパラメタ表示に書き直してさっきの方法を使ってもよい

$C = \{\vec{a} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\} \cap \{\vec{p} | \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0\}$.

$\vec{p} \in C$ とすると,

$\exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{a} + t\vec{d} = \vec{p}$かつ$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$.

$\vec{p}$ を代入して得られる $\vec{n} \cdot (\vec{a} + t\vec{d} - \vec{b}) = 0$ を満たす $t$ を求めて，パラメタ表示に代入すればいい.

L06-Q2

## Quiz(パラメタ表示された直線の共通部分)

2 直線

$\vec{p} = (0, 2) + (3, -1)t$ $(t \in \mathbb{R})$

$(0, 1) \cdot (\vec{p} - (3, 0)) = 0$

の共通部分を求めよう．図を描こう.

# ここまで来たよ

5 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式
- 平面上の直線の共有点
- 空間内の直線のパラメタ表示
- 空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

# 空間内の直線のパラメタ表示 石村畑 線形代数 §1.4(p.20)

## $\vec{a}$ を通り, 方向ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のパラメタ表示 石村畑 線形代数 §1.3

$\vec{d} \neq \vec{0}$.

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$$

すなわち $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ $\quad (t \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

- チェック 1 $\vec{a}$ を通る
- チェック 2 $\vec{d}$ に平行である

GeoGebra(動的幾何ソフトウェア)

2D `https://www.geogebra.org/m/skj88vSN`

3D `https://www.geogebra.org/m/KYg7AZ7M`

**空間 (3 次元) のとき**，パラメタ表示は，

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + (d_1, d_2, d_3)t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$d_1, d_2, d_3 \neq 0$ の場合，$t$ を消去すると，見たことのある方程式になる．

$$\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}.$$

$d_i = 0$ の場合は個別に考える必要がある．

空間 (3 次元) のとき平面上の直線の方程式 $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ の形は，実は空間内の平面の方程式であって，**空間内の直線の方程式ではない**（式の個数が違う)

# ここまで来たよ

5 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式
- 平面上の直線の共有点
- 空間内の直線のパラメタ表示
- 空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

# (空間内の) 平面のパラメタ表示

## $\vec{a}$ を通り, $\vec{d}, \vec{f}$ に平行な平面のパラメタ表示

$$\vec{p} - \vec{a} = s\vec{d} + t\vec{f}$$

すなわち $\vec{p} = \vec{a} + s\vec{d} + t\vec{f}$ $\quad (s, t \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

$\vec{d}, \vec{f} \neq \vec{0}, \vec{d}, \vec{f}$ は平行でない.

https://www.geogebra.org/m/YHmGKuJN

詳しくは次回か次々回.

# 空間内の平面のベクトル方程式 石村畑 線形代数 §1.4(p.21)

平面と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \vec{0}$) を, 平面の法 (線) ベクトル normal vector 石村畑 線形代数 p.21 という.

## $\vec{a}$ を通り, $\vec{n}(\neq \vec{0})$ に垂直な平面のベクトル方程式

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

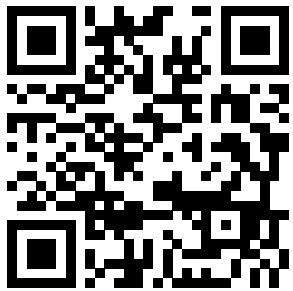
$\vec{a} \cdot \vec{n} = C$ とおくと,

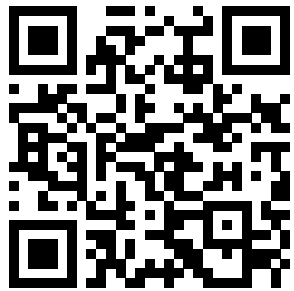
$$\vec{n} \cdot \vec{p} = C$$

$\vec{n} = (a, b, c)$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C.$$

2D `https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P`
3D `https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2`





# 例: $xy$ 平面，それに平行な平面

$\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，$\vec{d} = \vec{e}_x, \vec{f} = \vec{e}_y$ に平行な平面は，

$$\vec{p} = (x_0, y_0, z_0) + (1, 0, 0)s + (0, 1, 0)t$$

その平面は，
$\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ を通り，$\vec{n} = \vec{e}_z$ に垂直なので，

$$\begin{aligned} \vec{e}_z \cdot (\vec{p} - \vec{a}) &= 0 \\ (0, 0, 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\ z - z_0 &= 0 \end{aligned}$$

同様に，
$yz$ 平面に平行な平面の方程式は $x - x_0 = 0$.
$zx$ 平面に平行な平面の方程式は $y - y_0 = 0$.

L06-Q3

## Quiz(平面の方程式)

1. 単位法線ベクトルが $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2)$ であり, 点 $\vec{a} = (1, 0, 0)$ を通る平面の方程式を求めよう.
2. 単位法線ベクトルが $\vec{n} = (0, 0, 1)$ であり, 点 $\vec{a} = (0, 0, -4)$ を通る平面の方程式を求めよう.

mobius IH1.4

石村畑 線形代数 問題 4(p.22), 演習 4(p.23)

# 直線 (パラメタ表示) と平面 (ベクトル方程式) の共有点

直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}(t \in \mathbb{R})$, 平面 $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ の共通部分 $C$ を求めたい.
$C = \{\vec{a} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\} \cap \{\vec{p} | \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0\}$.
$\vec{p} \in C$ とすると,
$\exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{a} + t\vec{d} = \vec{p}$かつ$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$.
$\vec{p}$ を代入して, $\vec{n} \cdot (\vec{a} + t\vec{d} - \vec{b}) = 0$. これを満たす $t$ を求め, パラメタ表示に代入すればよい.

石村畑 線形代数 問題 4(p.22) 演習 4(p.23)

# 行列の和とスカラー倍と積

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L07(2025-04-30 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-30 Wed 13:06 JST hig"

## 今日の目標

- 石村畑 線形代数 §2.1 行列の型と行と列が説明できる
- 石村畑 線形代数 §2.1 行列の和とスカラー倍を計算できる
- 石村畑 線形代数 §2.2 行列の積を計算できる

L06-Q1

Quiz 解答: パラメタ表示された直線の共通部分

$\vec{p}$ が共通部分に含まれるとする.

$\exists s, t$ s.t. $\vec{p} = (0,2) + (3,-1)t = (3,0) + (6,-1)s$.

成分表示して

$$\begin{aligned} 0 + 3t &= 3 + 6s, \\ 2 - t &= 0 - s. \end{aligned}$$

これを解いて，$t = 3, s = 1$.

パラメタ表示に $t$ を代入して，$\vec{p} = (9,-1)$ ($s$ を代入しても当然同じ結果になる)，

よって，共通部分は $(9,-1)$ の一点.

L06-Q2

Quiz 解答: パラメタ表示された直線の共通部分

$\vec{p}$ が共通部分に含まれるとすると，

$(\exists t$ s.t. $\vec{p} = (0,2) + (3,-1)t)$ かつ $(0,1) \cdot (\vec{p} - (3,0)) = 0$.

その $t$ を $t_0$ とかく．$\vec{p}$ を代入して，
$(0,1)\cdot((0,2)+(3,-1)t_0-(3,0))=0.$
$2-t_0-0=0.$
よって，$t_0=2.$
$t=2$ を代入することにより，共通部分は一点 $\vec{p}=(6,0).$

L06-Q3

## Quiz 解答: 平面の方程式

1. $(3(x-1)+1(y-0)-2(z-0))=0$, すなわち $3x+y-2z=3.$
2. $0(x-0)+0(y-0)+1(z+4)=0$, すなわち，$z=-4.$

# ここまで来たよ

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

7 行列の和とスカラー倍と積
- 行列の定義
- 行列の和, スカラー倍
- 行列の積

# 行列

## 定義 (行列 石村畑 線形代数 p.21)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように長方形状に実数を並べて書いたものを $m$ 行 $n$ 列の ($(m,n)$ 型の) 行列 という.
$a_{ij} \in \mathbb{R}$ を $A$ の $(i,j)$ 成分という

Mobius での入力 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ は mobius では

< <1|2|3>,<4|5|6> > または < <1,4>|<2,5>|<3,6> > と入力する.

,は縦の隣接, |は横の隣接を表す.

数学では，新しい概念（対象）を定義するたびに，対象の「等しい」「相等」を定義する．
「どういう同値類で考えるか」
ある概念で, 2 つが「等しい」ことの定義は自明ではない．

- 三角形
- 分数
- 零ベクトル

## 定義 (行列の相等 石村畑 線形代数 p.31)

行列 $A, B$ に対して，

$$A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$$

- $A$, $B$ の型が同じ ( $(m, n)$ とする)，かつ
- $\forall i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\ a_{ij} = b_{ij}$

## 定義 (行, 列 石村畑 線形代数 p.26)

- $m$ 行 1 列の行列を縦ベクトル，列ベクトルという 石村畑 線形代数 p.220
- 行列 $A$ の中の $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$ を, 行列 $A$ の第 $j$ 列という
- $A$ の第 $j$ 列を $m$ 行 1 列の行列すなわちベクトル (列ベクトル, 縦ベクトル) と見なした $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を, $A$ の第 $j$ 列ベクトルという mobius <a,b,c>
- 1 行 $n$ 列の行列を横ベクトル，行ベクトルという
- 行列 $A$ の中の $a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}$ を, 行列 $A$ の第 $i$ 行という
- $A$ の第 $i$ 行を 1 行 $n$ 列の行列すなわちベクトル (行ベクトル, 横ベクトル) と見なした $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ を, $A$ の第 $i$ 行ベクトルという 大注意:mobius <a|b|c>

石村畑 線形代数 問題 5(p,28), 演習 5(p.29) mobius IH2.1

ベクトルは行列の一種だが, mobius では, $m$ 行 1 列の行列<<a,b,c>> と, 列ベクトル (縦ベクトル)<a,b,c> を区別する, など. mobius L00.04

# 零行列，ゼロ行列

**定義 (零行列** 石村畑 線形代数 p.30**)**

すべての成分が $0$ である行列を零行列といい $O$ (英字大文字) であらわす．

零行列は多数ある… $m$ 行 $n$ 列であることを特に示すときは，$O_{mn}$.
この $mn$ は，成分の $a_{ij}$ とは違い，型を示す．
あとで調べていくとわかるが，数（スカラー）の世界の $0$ のような役割の行列．

# 正方行列

## 定義 (正方行列 石村畑 線形代数 p.27)

行列 $A$ が $n$ 行 $n$ 列であるとき, $A$ は $n$ 次の正方行列という.

## 定義 (対角行列 石村畑 線形代数 p.220)

$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という.
対角成分でない成分が 0 である正方行列
($1 \leq {}^{\forall} i, j \leq n \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ である正方行列 $A$)
を対角行列という.

# 単位行列

## 定義 (単位行列 石村畑 線形代数 p.30)

$n$ 次の単位行列 $E$ or $E_n$ とは,

$n$ 次正方行列で $(i,j)$ 成分が $e_{ij} = \delta_{ij} \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ であるものをいう.

正方行列とは，対角成分が 1 であるような対角行列.
あとで調べていくとわかるが，数（スカラー）の世界の 1 のような役割の行列.

# ここまで来たよ

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

7 行列の和とスカラー倍と積
- 行列の定義
- 行列の和, スカラー倍
- 行列の積

# 行列の和, スカラー倍

## 定義 (行列の和とスカラー倍 石村畑 線形代数 p.32)

- 行列の和
  - 型が同じ時だけ，行列と行列の和が定義される
  - 成分ごとに加える
- 行列のスカラー倍
  - すべての成分に同じスカラーをかける

## 定義 (行列の $(-1)$ 倍と差の略記 石村畑 線形代数 p.32)

$$-A \overset{\text{def.}}{=} (-1)A.$$
$$A - B \overset{\text{def.}}{=} A + (-B) = A + (-1)B.$$

ちょっと，前から知ってるベクトルに似てる… ベクトルは $m$ 行 1 列の行列だから．
行列のスカラー倍はベクトルの実数倍に相当．ベクトルの実数倍も「スカラー倍」ということがある．

## 定理 (行列の和とスカラー倍の性質 石村畑 線形代数 定理 2.1.1(p.33))

石村畑 線形代数 p.33

相等の定義，和の定義にもどる．型と成分が等しいことを言う．
なるべく行列の変数 $A, B, O, E$, 実数の変数 $a, b, c$ のまま計算し, 成分で書くのは最後の手段

石村畑 線形代数 問題 6(p.34), 演習 6(p.35)　mobius　IH2.1

# ここまで来たよ

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

7 行列の和とスカラー倍と積
- 行列の定義
- 行列の和, スカラー倍
- 行列の積

# 和の記号 $\sum$ の意味を再確認

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| $b$ | 111 | 107 | 105 | 103 | 102 |

$a_1 = 2$ , $a_2 = 3$ , $a_3 = 5$ , $a_4 = 7$ , $a_5 = 11$
$b_1 = 111$, $b_2 = 107$ ,$b_3 = 105$ , $b_4 = 103$ , $b_5 = 102$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = 3 + 5 + 7 = \sum_{j=2}^{4} a_j,$$

$$\sum_{i=2}^{4} 2^{a_i} = 2^3 + 2^5 + 2^7,$$

$$\sum_{i=0}^{2} a_{i+2} = 3 + 5 + 7,$$

$$\sum_{k=3}^{5} b_k = 105 + 103 + 102,$$

$$\sum_{i=p}^{q} g(a_i) = g(a_p) + g(a_{p+1}) + \cdots + g(a_q).$$

mobius IH1.2

$$\sum_{i=0}^{2} b_{5-i} = 102 + 103 + 105,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_i = 3 \cdot 107 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 103,$$

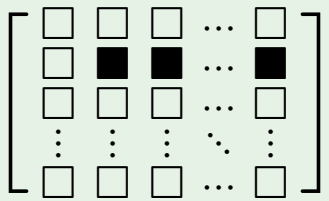
$$i = 2, \sum_{j=2}^{4} a_i b_j = 3 \cdot 107 + 3 \cdot 105 + 3 \cdot 103,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_{6-i} = 3 \cdot 103 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 107,$$

$\vdots$

## Quiz(成分の和の記号)

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して，次の図の ■ の位置の成分 $a_{ij}$ の和を，$\sum$ と $a_{ij}$ を使って表そう．正解は 1 つではないが，1 つ答えればよい．



Hint. $n = 5$ と思って $a_{ij}$ の和で書いてみよう．$\sum$ の式はそれと一致する?
$a_{ij}$ の $i, j$ の関係はあってる? 最大最小の $i$ はあってる?

# 行列の積 石村畑 線形代数 p.36

## 定義 (行列の積 石村畑 線形代数 p.36)

- 行列 $A$ ( $\ell \times m$ 型, 成分 $a_{ij}$ $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 $B$ ( $m' \times n$ 型, 成分 $b_{ij}$ $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 $A, B$ の積 $AB$ が定義され,

- 行列 $C = AB$ ( $\ell \times n$ 型, 成分 $c_{ij}$ $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

# 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ell = 2, m = m' = 3, n = 2.$

$$\begin{aligned} c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} &= a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} \\ &= -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3 \end{aligned}$$

# 行列の積のルールの直観的おぼえ方

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

横ベクトルと行列の積. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ 縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要.

ベクトルの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は (まだ) 一例とは思えない (型があってない).

なんでこんなへんな定義？
結合則 $(AB)C = A(BC)$ が成立する，役に立つ定義．
対応する成分ごとにかける積はアダマール積 $\odot$ として知られるが，超マイナー

石村畑 線形代数 問題 7(p.38) 演習 7(p.39) 問題 8(p.40) 演習 8(p.40)

mobius IH1.2

# 空間内の点と直線と平面の共有点

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

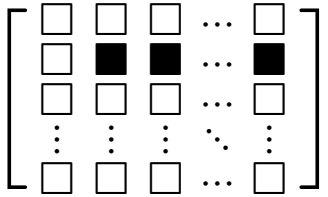
線形代数☆演習 I L08(2025-05-02 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-02 Fri 11:34 JST hig"

今日の目標

- 教科書に追加 平面のパラメタ表示を書ける
- 教科書に追加 平面に垂直なベクトルが求められる
- 石村畑 線形代数 §1.4 直線と平面の共有点を求められる
- 教科書に追加 点が平面上にあるかを判定できる

## Quiz 略解



$$\rightsquigarrow \sum \blacksquare = \sum_{j=2}^{n} a_{2j} = \sum_{k=0}^{n-2} a_{2k+2} = \sum_{k=0}^{n-2} a_{2n-k}.$$

# ここまで来たよ

7 行列の和とスカラー倍と積

8 daytitle
- 行列の積
- 空間内の平面のパラメタ表示
- 共有点の求め方

## 命題 (行列の積の非可換性 石村畑 線形代数 p.37)

$A, B$ が行列で，積 $AB$ が定義されるとき，
$AB = BA$ とは限らない．

### 反例

$(\square\ \square\ \square)\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix}(\square\ \square\ \square)$ では型が違う．

$(\square\ \square\ \square)\begin{pmatrix}\square & \square & \square\\ \square & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}$ は定義されるが，$\begin{pmatrix}\square & \square & \square\\ \square & \square & \square\\ \square & \square & \square\end{pmatrix}(\square\ \square\ \square)$ は定義されない．

定義されても $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}$

## 命題 (行列の積の結合性)

$A, B, C$ が行列で，積 $(AB)C$ が定義されるとき，
$(AB)C = A(BC)$.

この行列を $ABC$ と略記する.

証明 両辺の型は同じ．成分は，

左辺$_{ij} = \sum_{\ell}(\sum_{k} a_{ik}b_{k\ell})c_{\ell j}$.

右辺$_{ij} = \sum_{k} a_{ik}(\sum_{\ell} b_{k\ell}c_{\ell j})$.

実演

$$(\square\ \square\ \square)\begin{pmatrix}\square & \square & \square & \square\\ \square & \square & \square & \square\\ \square & \square & \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\\ \square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

左辺 $= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

右辺 $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ex+fz & ey+fw \\ gx+hz & gx+hz \end{pmatrix}$.

# ここまで来たよ

7 行列の和とスカラー倍と積

8 daytitle
- 行列の積
- 空間内の平面のパラメタ表示
- 共有点の求め方

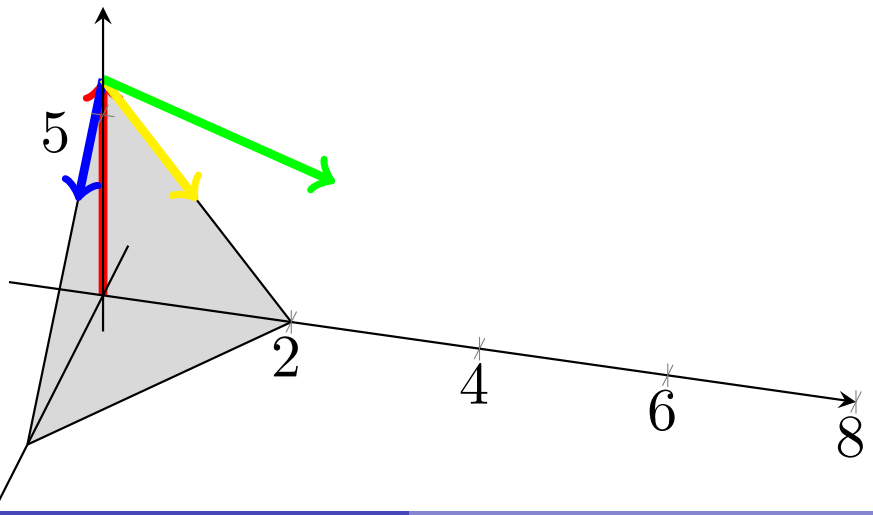
# 空間内の平面のパラメタ表示

## $\vec{a}$ を通り, $\vec{d}, \vec{f}$ に平行な平面のパラメタ表示 教科書に追加

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d} + s\vec{f}$$

すなわち $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} + s\vec{f}$ $\quad (t, s \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

$\vec{d}, \vec{f}$: 接 (線) ベクトル. $\vec{d}, \vec{f} \neq \vec{0}, \vec{d}, \vec{f}$ は平行でない. あとで出てくる法 (線) ベクトル $\vec{n} = \vec{d} \times \vec{f}$.



# 平面の様々な表示

平面に平行な（しかしたがいに平行でない）ベクトル $\vec{d}, \vec{f}$ から，
平面に垂直なベクトル（法線ベクトル）のうちひとつを，外積 $\vec{n} = \vec{d} \times \vec{f}$ で作れる．
これを利用して，平面のパラメタ表示から，平面の方程式が作れる．

**$\vec{a}$ を通り，$\vec{n}$ に垂直な平面の方程式** 線形代数☆演習 I(2025)L06 石村畑 線形代数 p.21

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

直線の様々な表現次のどれからどれにでも書き替えられるように．

- 通る点，…と…と平行
- 通る点，接ベクトル
- パラメタ表示
- 通る点，…と垂直
- 通る点，法線ベクトル
- 法線ベクトルによるベクトル方程式
- 通る点 3 つ
- 通る点 1 つと平面上の直線
- 平面上の直線 2 つ

# 点と直線と平面のパラメタ表示と方程式のまとめ

| | パラメタ表示 $t, s \in \mathbb{R}$ | 方程式 |
|---|---|---|
| 平面の点 | $\vec{p} = (a_1, a_2)$ | $x = a_1, y = a_2$ |
| 空間の点 | $\vec{p} = (a_1, a_2, a_3)$ | $x = a_1, y = a_2, z = a_3$ |
| 平面の直線 | $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ | $\vec{n} \cdot ((x, y) - \vec{a}) = 0$ |
| 空間の直線 | $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ | $\frac{x-a_1}{d_1} = \frac{y-a_2}{d_2} = \frac{z-a_3}{d_3}$ |
| 空間の平面 | $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} + s\vec{f}$ | $\vec{n} \cdot ((x, y, z) - \vec{a}) = 0$ |

$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ タイプは，直線とか平面とでなく「入れ物から 1 次元低下」

例

| | パラメタ表示 $t, s \in \mathbb{R}$ | 方程式 |
|---|---|---|
| 空間の原点 | $\vec{p} = (0, 0, 0)$ | $x = 0, y = 0, z = 0$ |
| 空間の $x$ 軸 (直線) | $\vec{p} = \vec{0} + t\vec{e}_x$ | $y = z = 0$ |
| 空間の $xy$ 平面 | $\vec{p} = \vec{0} + t\vec{e}_x + s\vec{e}_y$ | $z = 0$ |

L08-Q1

## Quiz(平面のパラメタ表示とベクトル方程式)

$\vec{a} = (13, 2, 1)$ を通り, ベクトル $\vec{d} = (0, 1, 3), \vec{f} = (0, 5, 2)$ に平行な平面を考える.

1. パラメタ表示を求めよう
2. ベクトル方程式を求めよう
3. 点 $(13, 9, 9), (1, 1, 3)$ はそれぞれ平面上にあるか，パラメタ表示から調べよう.
4. 点 $(13, 9, 9), (1, 1, 3)$ はそれぞれ平面上にあるか，ベクトル方程式から調べよう.

# ここまで来たよ

7 行列の和とスカラー倍と積

8 daytitle
- 行列の積
- 空間内の平面のパラメタ表示
- 共有点の求め方

# 共有点（共通部分）の求め方

2 つの集合（点，直線，平面）の共有点を求めることを考える．
一方がパラメタ表示，一方が方程式で表現されているとやりやすい．必要ならどちらかを書き替える．
（パ – パ，方 – 方は，そのままでももいちおうできる．後ろを見て）．

## パラメタ表示 – 方程式の 2 つの集合の共有点

$A = \{\vec{p}(t) | t \in \mathbb{R}\}, B = \{\vec{p} | f(\vec{p}) = 0.$
（パラメタは,$t, s, u, \ldots$ のように複数かも）
$\vec{r} \in A \cap B \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{r} = \vec{p}(t)$かつ$f(\vec{p}(t)) = 0.$
$t$ について解き，$t$ の動ける範囲を限定して，パラメタ表示を作り直す．
何を表すパラメタ表示か考える．

石村畑 線形代数 問題 4(p.22), 演習 4(p.23)

L08-Q2

## Quiz(平面と直線の共有点)

直線 $\ell$ は，点 $(-1,-2,0)$ を通り，ベクトル $(3,1,2)$ に平行である．
平面 $P$ は，点 $(0,0,1)$ を通り，ベクトル $(3,1,0),(0,1,-3)$ に平行である．
$\ell$ と $P$ の共有点を求めよう．

石村畑 線形代数 問題 4(p.22), 演習 4(p.23)

L08-Q3

## Quiz(パラメタ表示された平面とベクトル方程式で表示された直線の共有点)

$x$ 軸と，
$(2,3,4)$ を通り $(2,0,1)$ と $(0,3,2)$ に平行な平面 $P$ を考える．
$x$ 軸と $P$ の共有点を求めよう．

線形代数☆演習 I(2025)L6

## 他の方法も使える

パラメタ表示-パラメタ表示 線形代数☆演習 I(2025)L05, 方程式-方程式 (連立させればいい) の場合は，一方を別の表示に直してもいいし，そのまま直接できる場合もある．

## これは「普通の」場合

ここでは，得た方程式やパラメタ表示が何を表すか見やすいケースのみを扱った．

ここで述べた共有点は，普通の場合のみ．たまたま 2 平面が平行とか，2 平面が重なるとかは考えてない．

石村畑 線形代数 §4では，そういう場合まで含めて，自動的に共有点の集合が求められるようになる．

# 逆行列

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L09(2025-05-07 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-09 Fri 06:22 JST hig"

今日の目標

- 正則行列，逆行列，行列のべき乗の定義を説明できる

  石村畑 線形代数 §2.3
- 対角行列，2 次正則行列の逆行列を求められる

  石村畑 線形代数 §2.3

L08-Q1

## Quiz 解答: 平面のパラメタ表示とベクトル方程式

1. パラメタ表示は

$$\vec{p} = (13, 2, 1) + (0, 1, 3)t + (0, 5, 2)s \qquad (t, s\text{はパラメタ})$$

2. $\vec{d}, \vec{f}$ の両方に垂直なベクトル $\vec{n} = \vec{d} \times \vec{f} = (-13, 0, 0)$ は平面の法線ベクトルのひとつ. よって, 方程式は,

$$(-13, 0, 0) \cdot (\vec{p} - (13, 2, 1)) = 0$$

すなわち

$$x - 13 = 0.$$

3. 点 $(13,9,9)$ が平面上にあるか，とは，平面と点の共有点を求めろ（それは空集合か？）ということ．
平面のパラメタ表示 $(13,2,1)+(0,1,3)t+(0,5,2)s$ を，点の方程式 $x-13=y-9=z-9=0$ に代入し，
$(13)-13=(2+t+5s)-9=(1+3t+2s)-9=0.$
これを解いて，$t=2,s=1$．共有点は，
$\{(13,2,1)+(0,1,3)t+(0,5,2)s|t=2,s=1\}$．すなわち，共有点の集合は $\{((13,9,9)\}\neq\emptyset$．よって，$(13,9,9)$ は平面上にある．
$(1,1,3)$ について同様に考えると，$t,s$ は解なしとなり，共有点の集合は空集合．点 $(1,1,3)$ は平面上にない．

4. 点 $(13,9,9)$ が平面上にあるか，とは，平面と点の共有点を求めろ（それは空集合か？）ということ．
点の「パラメタ表示」$\{(13,9,9)\}$ を，平面の方程式に代入してチェックすると，$13-13=0$ と成立している．よって，共有点の集合は $\{((13,9,9)\} \neq \emptyset$. よって，$(13,9,9)$ は平面上にある．
$(1,1,3)$ について同様に考えると，平面の方程式に代入してチェックすると，方程式は満たされない．共有点の集合は空集合．点 $(1,1,3)$ は平面上にない．

L08-Q2

## Quiz 解答: 平面と直線の共有点

パラメタ $t,s \in \mathbb{R}$.
直線 $\ell$ のパラメタ表示は $\vec{p}=(-1,-2,0)+(3,1,2)t$. (1)
直線 $\ell$ の方程式は $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. (2)
平面 $P$ のパラメタ表示は $\vec{p}=(0,0,1)+(3,1,0)t+(0,1,-3)s$. (3)
平面 $P$ の法線ベクトルは $(3,1,0)\times(0,1,-3)=(-3,9,3)$.
$\vec{n}=(1,-3,-1)$ も法線ベクトル．

平面 $P$ の方程式は $(1,-3,1)\cdot((x,y,z)-(0,0,1))=0$. (4).
解 1. (1) を (4) に代入して，$t$ について解くと $t=-3$. よって共有点は，一点 $(8,1,6)$.
解 2. (3) を (2) に代入して，$t,s$ について解くと $t=\frac{8}{3}, s=-\frac{5}{3}$. よって共有点は，一点 $(8,1,6)$.

L08-Q3

## Quiz 解答: パラメタ表示された平面とベクトル方程式で表示された直線の共有点

$x$ 軸のパラメタ表示は，$\vec{p}=\vec{0}+t\vec{e}_x$ $(t\in\mathbb{R})$. 方程式は $y=z=0$, $x$ 任意.
$P$ のパラメタ表示は $(x,y,z)=(2,3,4)+(2,0,1)t+(0,3,2)s$ $(t,s\in\mathbb{R})$
パラメタ表示を $y=z=0$ に代入して，

$$\begin{aligned} 3+3s &= 0 \\ 4+t+2s &= 0 \end{aligned}$$

これを $t,s$ について解いて，$t=-2, s=-1$.
これをパラメタ表示に代入すると，

$(2,3,4)+(2,0,1)(-2)+(0,3,2)(-1)=(-2,0,0)$.
よって，共有点は，一点 $(-2,0,0)$.

L08-Q4

Quiz 解答: パラメタ表示された直線と方程式で書かれた平面の共有点

$x$ 軸のパラメタ表示は，$\vec{p}=\vec{0}+t\vec{e}_x$ $(t\in\mathbb{R})$.
$P$ のパラメタ表示は $(x,y,z)=(2,3,4)+(2,0,1)t+(0,3,2)s$ $(t,s\in\mathbb{R})$
これを方程式で書く．法線ベクトルは $(2,0,1)\times(0,3,2)=(-3,-4,6)$ なので，

$$(-3,-4,6)\cdot(\vec{p}-(2,3,4)$$

すなわち，

$$-3(x-2)-4(y-3)+6(z-4)=0$$

これに直線のパラメタ表示を代入して，

$$-3(t-2)-4(0-3)+6(0-4)=0$$

よって，$t=-2$.
パラメタ表示に $t=-2$ を代入して，共有点は，一点 $-2\vec{e}_x=(-2,0,0)$.

# ここまで来たよ

8 空間内の点と直線と平面の共有点

9 逆行列
- 行列の積の性質
- 逆行列

# 行列の積の性質

## 定理 (行列の積の性質 石村畑 線形代数 定理 2.2.1(p.37))

単位行列の性質 $AE = A, EA = A$ ($E$ : 単位行列)

結合則 $(AB)C = A(BC)$ 線形代数☆演習 I(2025)L8 ... 積を計算する順序は自由

分配則 $A(B + C) = AB + AC$ ... 和と積の関係

分配則 $(A + B)C = AC + BC$

## 単位行列の性質の証明

$A$ の $(i, j)$ 成分を $a_{ij}$ とするとき，

$AE$ の $(i, j)$ 成分は，$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$

$EA$ の $(i, j)$ 成分は，$\sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij}$

## $\delta$ の計算

$\sum_{i=1}^{n} f(i)\delta_{ij} = f(j)$

「$\delta_{ij}$ が $i$ の和に入ってたら，$i$ で和をとる代わりに $j = i$ を代入」

## 結合則の証明 線形代数☆演習 I(2025)L08

## 定義 (行列のべき乗 石村畑 線形代数 p.37)

$\ell$ 次正方行列 $A$ と，整数 $n \geq 0$ に対して，

$A^n = \underbrace{A \dots A}_{n}$

$A^1 = A$

$A^0 = E$

べき＝冪＝巾＝power

‘well-defined’

## 命題 (行列の指数法則)

$\ell$ 次正方行列 $A$ と整数 $n, m \geq 0$ に対して，

$A^n A^m = \underbrace{A \dots A}_{n} \underbrace{A \dots A}_{m} = A^{n+m}$.

## 命題 (線形代数☆演習 I(2025)L8)

非自明な零因子の存在 $A \neq O, B \neq O$ かつ $AB = O$ となる $A, B$ がある

非可換性 $AB \neq BA$ となる $A, B$ がある

### 反例

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

代数 (algebra) の予感

代数入門 (3 年)

# 対角行列の積，べき乗

復習：対角成分とは成分 $a_{ii}$．対角行列とは，対角成分以外は 0 であるような行列 線形代数☆演習 I(2025)L07

## 命題 (対角行列の成分表示 教科書に追加)

$n$ 次の対角行列 $D$ の成分 $d_{ij}$ は，対角成分 $\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$ (ラムダ) とクロネッカーのデルタ記号 $\delta$ を用いて，次のように書ける．

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

証明

## 対角行列の積

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} =$$

ラムダ，ミュー

## 命題

対角行列の積 $n$ 次の対角行列 $A, B$ の対角成分をそれぞれ，
$\lambda_i (i = 1, \dots, n)$, $\mu_i (i = 1, \dots, n)$ とする．
積 $AB, BA$ はまた $n$ 次の対角行列で，$AB = BA$ であり，対角成分は
$\lambda_i \cdot \mu_i (i = 1, \dots, n)$.
べき乗 $A^n$ はまた $n$ 次の対角行列で，対角成分は… 石村畑 線形代数 p.49

## 証明

L09-Q1

## Quiz(対角行列の計算)

行列 $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ と，対角成分が $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 11, \lambda_3 = 0$ の 3 次の対角行列 $D_2$ を考える．

1. 和 $D_1 + D_2$ を求めよう．
2. 積 $D_1 D_2, D_2 D_1$ を求めよう．
3. 逆行列 $D_1^{-1}$ を求めよう．

# ここまで来たよ

8 空間内の点と直線と平面の共有点

9 逆行列
- 行列の積の性質
- 逆行列

# 逆行列 石村畑 線形代数 §2.3

## 定義 (逆行列 石村畑 線形代数 p.42)

$n$ 次正方行列 $A$ に対して，

$$AX = E_n, XA = E_n$$

となる $n$ 次正方行列 $X$ が存在するとき，

- $A$ は正則 (non-singular) であるという．
- $X$ は $A$ の逆行列 (inverse) であるという

## 定理 (逆行列の一意性 石村畑 線形代数 定理 2.3.1)

$A$ が正則ならば，$A$ の逆行列が存在し，ただひとつに定まる．

「一意的 (unique) に存在する」

証明

## 定義 (逆行列の記号)

$A$ が正則のとき，$A$ の逆行列を $A^{-1}$ (エーインバース）とかく．

$\frac{1}{A}$ という書き方はしない．
$\frac{B}{A}$ という書き方は well-defined でない．$B^{-1}A$ なの $AB^{-1}$ なの？

## 定義 (逆行列のべき)

$\ell$ 次行列 $A$ が正則のとき, 整数 $n \geq 0$ に対して，

$$A^{-n} \overset{\text{def.}}{=} (A^n)^{-1}$$

## 命題 (行列の指数法則)

$\ell$ 次行列 $A$ が正則のとき, $n, m \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\begin{aligned} A^{n+m} &= A^n A^m, \\ (A^n)^m &= A^{nm}, \\ (A^n)^{-1} &= (A^{-1})^n \end{aligned}$$

## 定理 (2 次の行列の逆行列 石村畑 線形代数 定理 2.3.2(p.47))

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

- $A$ は正則である $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.
- $ad - bc \neq 0$ のとき，$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

### 証明

L09-Q2

## Quiz(逆行列)

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよう.
2. の逆行列 $(10A)^{-1} = \left(10 \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right)^{-1}$ を求めよう.
3. 逆行列 $(A + A)^{-1}$ を求めよう.

# 対角行列の逆行列

## 命題 (対角行列の正則性・逆行列 教科書に追加)

$n$ 次の対角行列 $D$ の対角成分を $\lambda_i$ $(i = 1, \dots, n)$ とする.

- $\exists i$ s.t. $\lambda_i = 0 \Leftrightarrow D$ は正則でない
- $\forall i$ $\lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow D$ は正則である
  - このとき, $D^{-1}$ は $n$ 次の対角行列で対角成分は $1/\lambda_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

# 積の逆行列

**命題 (積の逆行列 教科書に追加)**

$n$ 次行列 $A, B$ が正則のとき, 積 $AB$ も正則で,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

証明

問 和 $A + B$ は正則？ 証明 or 反例

# 行列のべき乗の計算

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L10(2025-05-09 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-09 Fri 11:11 JST hig"

今日の目標

- 対角行列，特別な上三角行列の $n$ 乗を求められる，ケーリー・ハミルトンの定理を使って 2 次正方行列のべき乗を楽に計算できる 石村畑 線形代数 §1.4
- 行列の和，スカラー倍，積，べき乗，逆の混じった式を整理して簡単化できる

## L09-Q1

## Quiz 解答: 対角行列の計算

1. $D_1 + D_2 = \begin{pmatrix} 9 & & \\ & 14 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$.
2. $D_1 D_2 = \begin{pmatrix} 2\cdot 7 & & \\ & 3\cdot 11 & \\ & & 5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & & \\ & 33 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = D_2 D_1$.
3. $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1} & & \\ & 3^{-1} & \\ & & 5^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & & \\ & 3^{-1} & \\ & & 5^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} = E_3$ より，
   $D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & & \\ & 3^{-1} & \\ & & 5^{-1} \end{pmatrix}$.
   なお，$D_2$ は正則でない．

## L09-Q2

## Quiz 解答: 逆行列

1. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\cdot 5 - 7\cdot 3} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $(10A)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 70 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1100} = \begin{pmatrix} 50 & -70 \\ -30 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{110} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 10^{-1}A^{-1}$.

emark よく考えると，スカラー $k \neq 0$ と正則行列 $A$ について $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ であることに気づく．

3. $(A + A)^{-1} = (2A)^{-1} = 2^{-1}A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

# ここまで来たよ

9 逆行列

10 行列のべき乗の計算
- 行列の積の性質
- 行列のべき乗

# 行列の積の逆行列

**命題 (行列の積の逆行列 教科書に追加)**

$n$ 次正方行列 $A, B$ が正則のとき, 積 $AB$ も正則で,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

証明

問 和 $A+B$ は正則？ 証明 or 反例
スカラー $k \neq 0$ と正則行列 $A$ について $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
証明

mobius IH2.4

L10-Q1

## Quiz(逆行列)

$A, B$ が正則行列であるとき，次の積を展開して整理しよう．

1. $(A+B)^2$
2. $(A+B)(A-B)$
3. $(A+B)^3$
4. $((2A)+(2A)^{-1})^2$
5. $(AB+A^{-1}B^{-1})^2$

L10-Q2

## Quiz(逆行列)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

を考える.

1. $AX = C$ を満たす 2 次正方行列 $X$ が存在するなら求めよう.
2. $YA = C$ を満たす 2 次正方行列 $Y$ が存在するなら求めよう.
3. $BZ = C$ を満たす 2 次正方行列 $Z$ が存在するなら求めよう.
4. $WB = C$ を満たす 2 次正方行列 $W$ が存在するなら求めよう.

石村畑 線形代数 総合演習 2.3(p.52)

## 命題 (正則行列の左右逆行列 教科書に追加)

$n$ 次正方行列 $A$ が正則のとき,

$$AY = E$$

または

$$YA = E$$

ならば，$Y = A^{-1}$ である

「(正則であることが最初からわかっているなら）左右一方だけチェックすればよい」

行列式 石村畑 線形代数 §3 を学ぶと，$AY = E$ から $A$ が正則であることもわかる

# ケーリー・ハミルトンの定理 石村畑 線形代数 定理 2.4.1

## 定理 (ケーリー・ハミルトン 石村畑 線形代数 定理 2.4.1)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = O_{22}.$$

$A^2 =$ ($A$ の 1 乗) + ($A$ の 0 乗) の形で，べきを落とすのに使える．
反復した適用を漸化式にすると，$A^n$ の一般項を導くこともできる（が対角化でやったほうがいい）

L10-Q3

## Quiz(ケーリー・ハミルトンによる行列のべき乗)

$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

1. ケーリー・ハミルトンの定理を利用して，$A^2, A^3, A^4$ を求めよう.
2. $A^n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を求めよう.

# ここまで来たよ

9 逆行列

10 行列のべき乗の計算
- 行列の積の性質
- 行列のべき乗

# 行列の $n$ 乗 石村畑 線形代数 定理 2.4.2

簡単に計算できるケースとして次がある．$n$ は行列の次数ではない．
より一般的な計算方法もある 対角化

## 定理 (行列の $n$ 乗 石村畑 線形代数 定理 2.4.2)

1. $A^2 = cA$ ($c$: 実数) ならば，$A^n = c^{n-1}A$ $(n = 1, 2, \dots)$.
2. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (対角行列) のとき，$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.
3. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (上三角行列の特別な形) のとき，$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, \dots)$
4. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (回転行列) のとき，$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ $(n \in \mathbb{Z})$.
   …ドモアブルの公式と関係あるが説明延期

石村畑 線形代数 問題 11(p.51) 例題 11(p.52) mobius IH1.4

証明 数学的帰納法による

# 写像・平面の線形変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L11(2025-05-14 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-24 Sat 16:44 JST hig"

今日の目標

- 写像の記号，言葉を正しく使える
- 行列により表現される線形変換の像を求められる

  石村畑 線形代数 p.211
- 知っている「移動」と線形変換を関係づけられる

## L10-Q1

### Quiz 解答: 逆行列

1. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
2. $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$.
3. $(A+B)^3 = A^3 + AAB + ABA + BAA + ABB + BAB + BBA + B^3$.
4. $((2A) + (2A)^{-1})^2 = 4A^2 + 2E + \frac{1}{4}A^{-2}$.
5. $(AB + A^{-1}B^{-1})^2 =$
   $ABAB + ABA^{-1}B^{-1} + A^{-1}B^{-1}AB + A^{-1}B^{-1}A^{-1}B^{-1}$. 特に
   $(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2$.

## L10-Q2

### Quiz 解答: 逆行列

1. $A$ は正則なので，左から $A^{-1}$ をかけて，$X = A^{-1}C$ =(成分で).
2. $A$ は正則なので，右から $A^{-1}$ をかけて，$Y = CA^{-1}$ =(成分で).

3. 1 次方程式を解いて $Z$ の成分を求めようとすると，解なしになるので，存在しない．
4. 1 次方程式を解いて $W$ の成分を求めようとすると，解なしになるので，存在しない．

L10-Q3

## Quiz 解答: ケーリー・ハミルトンによる行列のべき乗

1. $A^2 = (-2+1)A - (-2\cdot 1 - (-3)\cdot 1)E = -A - E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   $A^3 = (-2+1)A - (-2\cdot 1 - (-3)\cdot 1)E = -A^2 - A =$
   $-(-A-E) - A = E$. $A^4 = EA = A$. 以下繰り返す．
2. $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$A^n = \begin{cases} E & (n = 3k) \\ \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & (n = 3k+1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} & (n = 3k+2) \end{cases}$$

# ここまで来たよ

10 行列のべき乗の計算

11 写像・平面の線形変換
- 写像と変換
- 線形変換と行列
- 移動と線形変換の関係

# 写像 石村畑 線形代数 §5.6

## 定義 (写像)

2 つの集合 (set) $X, Y$ において，$X$ のどの要素 (element, 元ともいう) にも，$Y$ の要素が 1 つずつ対応しているとき，この対応 (規則) を $X$ から $Y$ への写像 (map, mapping) という．
$X$ を写像 $f$ の定義域 (domain)，$Y$ を写像 $f$ の終域 (codomain), 終集合 (target set) という．

## 写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (集合) $\to$ 終域 (集合)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 $\mapsto$ 像

$f(a) = b$ ともかく．$b$ を「$f$ による $a$ の像 (image)」という
「$f$ は $a$ を $b$ に写す」「$a$ は $f$ で $b$ に写される」などという．

# 写像の例

$X$=実数全体または部分集合, $Y$=実数全体，というケースに限定したとき，写像の定義は，（以前から知っている）関数 (function) の定義に一致する．

**例 (実数から実数への写像=関数)**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^2$　　高校なら関数 $f(x) = x^2$ と書くところ．

写像は, $\mathbb{R}$ と限らない一般の集合 $X, Y$ に対しても考えられる．ベクトルの集合 $\mathbb{R}^2$ とか．

## 例 (直線のパラメタ表示は写像の例)

平面内の場合 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
(空間内なら $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)
$f : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} t$
同様に使う書き方: $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} t$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} t$

## 例

空間内の平面のパラメタ表示は□から□への写像

$$\vec{p}(t, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} s$$

## 例

平面内の直線の方程式の $f(\vec{x})$ は［　　］から［　　］への写像

$$f(\vec{x}) = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 3x + 2y + 3 = 0$$

## 例

空間内の平面の方程式の $f(\vec{x})$ は［　　］から［　　］への写像

$$f(\vec{x}) = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 3x + 2y + 5z + 3 = 0$$

空間内の直線の方程式は［　　］から［　　］への写像 を使って書ける.

# 変換 石村畑 線形代数 p.211

## 定義 (変換)

集合 $X$ から $X$ 自身への写像を $X$ の変換 (transformation) という.

写像で，$Y = X$ のケースということ.

## 例 (実数の変換)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

(実数全体で定義された) 関数は，実数全体の集合の変換.

# ここまで来たよ

10 行列のべき乗の計算

11 写像・平面の線形変換
- 写像と変換
- 線形変換と行列
- 移動と線形変換の関係

# 線形変換 石村畑 線形代数 p.211,§5.6

## 定義 (線形変換)

線形空間 石村畑 線形代数 §5.1 $V$ から $V$ への線形写像 石村畑 線形代数 §5.5 を線形変換 1 次変換という． 線形代数 II

これは予告．線形空間や線形写像は今後定義される．

## 定義 (（2 次正方行列により表現される）線形変換,1 次変換 石村畑 線形代数 定理 5.7.1)

$\mathbb{R}^2$ の変換で,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

の形のものを, 2 次正方行列 $A$ により表現される線形変換,1 次変換 (linear transformation) という．$f = f_A$ と書く．

ここから，ベクトルは原則として縦ベクトルとする．縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を，2 行 1 列の行列とみなし，行列の積を使った．
$\mathbb{R}^n$, $n$ 次正方行列に対しても同様に定義される．
写像 $f$ と，行列 $A$ は，対応はするけど別もの．記号を混ぜてはいけない．$f$ は写し方のルール，$A$ は数を並べて書いたもの．

# 例題

行列 $A$ と $\vec{x}$ から像 $A\vec{x}$

計算例

$$\vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

mobius IH2.5

$\vec{x}$ と像 $A\vec{x}$ から行列 $A$

L11-Q1

## Quiz(線形変換の表現行列の決定)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，2 次正方行列 $A$ の表現する $\mathbb{R}^2$ の線形変換とする．

1. $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \vec{e}_1, f(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}) = \vec{e}_2$ であるとき，$A$ の成分を求めよう．
2. $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ であるとき，$A$ の成分を求めよう．

石村畑 線形代数 問題 50(p.194) mobius IH2.5

# これは確かに線形写像

## 命題 (線形性)

$n$ 次行列 $A$ に対して，
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$f : \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = A\vec{x}$
とする．
$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall a \in \mathbb{R}$

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$
$$f(a\vec{x}) = af(\vec{x})$$

実はこれは線形写像が（定義により）満たす性質．
特に，$a = 0$ とおいて，$f(\vec{0}) = \vec{0}$.
証明行列の積の性質（分配則，スカラー倍）から．

# ここまで来たよ

10 行列のべき乗の計算

11 写像・平面の線形変換
- 写像と変換
- 線形変換と行列
- 移動と線形変換の関係

# 線形変換の行列から日本語の記述へ

ベクトルを位置ベクトルと思うと，$\mathbb{R}^2$ の線形変換は，平面の「移動」高校数学 II の一種.

L11-Q2

## Quiz(行列で与えられた線形変換の意味（鏡映）)

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の表現する $\mathbb{R}^2$ の線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える．$A$ を，高校数学的に「○○に関する○○移動」のように表現しよう.

### 方針

具体的な（特殊でない）点を何個か写してみる，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を写してみる，ことで意味を考える.

# 日本語の記述から線形変換の行列へ

L11-Q3

## Quiz(線形変換の表現行列の決定)

次の $xy$ 平面すなわち $\mathbb{R}^2$ の「移動」すなわち変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は，行列で表現される線形変換か．そうである場合，その行列 $A$ を求めよう．

1. $x$ 軸方向の $+3$ の平行移動
2. 直線 $y = x$ に関する線対称移動
3. 直線 $y = 1$ に関する線対称移動

### 方針

$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ を式で考え，それが $A\vec{x}$ の形に書き直せるか考える．

石村畑 線形代数 問題 46(p.182), 問題 49(p.192)

# 線形変換による直線の像

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L12(2025-05-16 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-16 Fri 11:33 JST hig"

今日の目標

- 定義域の部分集合の像，値域を説明できる
- 線形変換による線分，直線の像を求められる

L11-Q1

## Quiz 解答: 線形変換の表現行列の決定

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく.

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} 1a + 2b &= 1, \\ 1c + 2d &= 0, \\ 3a + 4b &= 0, \\ 3c + 4d &= 1. \end{aligned}$$

これを $a, b, c, d$ について解いて，$A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

実は，$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = E$ から $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ を求めたことに相当する.

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を $a, b, c, d$ について解いて，$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

L11-Q2

## Quiz 解答: 行列で与えられた線形変換の意味（鏡映）

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して，
$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ なので，「$x$ 軸に関する線対称移動」
大学的には「$x$ 軸に関する鏡映変換 (reflection)」

L11-Q3n

## Quiz 解答: 線形変換の表現行列の決定

1. $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり，$A\vec{x}$ の形に書けない（‘定数項’ $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ を消せない）ので，行列で表現される線形変換でない．

別解　（背理法）$f$ が行列で表現される線形変換なら $f(\vec{0}) = \vec{0}$. しかし，$f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. 矛盾．よって行列で表現される線形変換ではない．

2. この変換は，$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

は，$x, y$ についての恒等式．$a = d = 0, b = c = 1$ が解．よって，
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で表現される線形変換である．「直線 $y = x$ に鏡映変換 (reflection)」

別解 線形変換だとすると，一般の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ でなくても，必要条件として具体的な ($\mathbb{R}^2$ なら) 2 点，例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を決定できる．実際，$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ は線対称移動を表していることがわかる．

3. （背理法）$f$ が行列で表現される線形変換なら $f(\vec{0}) = \vec{0}$. しかし，
$f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. 矛盾．よって行列で表現される線形変換ではない．

# ここまで来たよ

11 写像・平面の線形変換

12 線形変換による直線の像
- 線形変換の性質
- 部分集合の像，値域
- いろいろな線形変換

# 線形変換と平行四辺形

## 命題

原点を始点とする，平行四辺形の二辺と対角線のベクトルは，
（正則な行列で表現される）線形変換により
原点を始点とする，平行四辺形の二辺と対角線のベクトルに写る．

## 証明

原点を始点とする，平行四辺形の二辺と対角線のベクトルを，
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ とする．
線形変換 $f$ で写すと，線形性により，

$$f(\vec{a}), f(\vec{b}), f(\vec{c}) = f(\vec{a} + \vec{b}) \overset{\text{線形変換の線形性}}{=} f(\vec{a}) + f(\vec{b}).$$

実は，$f(\vec{a}), f(\vec{b}), f(\vec{c})$ が，零ベクトルや，平行なベクトルに写ったりする心配があるが，正則を課しておくとこれらの可能性は除かれる．後で見る

# 写像の相等

## 定義 (写像の相等)

$f : X \to Y$ と $g : Z \to W$ が等しい $(f = g)$ (写像として等しい) とは, $X = Z, Y = W$ でありかつ, $\forall x \in X \quad f(x) = g(x) \in Y$ (要素として等しい) が成り立つことをいう.

## 命題 (線形変換と行列の 1 対 1 対応)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換が $f = g$ であること
$\Leftrightarrow$ $f, g$ を表現する行列 $A, B$ の 4 個の成分 $a_{ij}, b_{ij}$ がそれぞれ等しいこと

証明 $\Rightarrow$)
$f(\vec{e}_1) = g(\vec{e}_1)$ より, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{22} \end{pmatrix}$.
$f(\vec{e}_2) = g(\vec{e}_2)$ より, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$
$\Leftarrow$)
$f(\vec{x}) = A\vec{x} = B\vec{x} = g(\vec{x})$.

# 基本ベクトルと線形変換

**命題**

$\mathbb{R}^2$ の線形変換は $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ の像で決まる.

主張「決まる」の正確な内容は,

**命題**

線形変換 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が $f(\vec{e}_1) = g(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2) = g(\vec{e}_2)$ ならば $f = g$

証明 $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して，線形変換の線形性を用いて，
$f(\vec{x}) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xg(\vec{e}_1) + yg(\vec{e}_2) = g(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = g(\vec{x})$.

実は，ペア $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ でなくても，「線形独立」石村畑 線形代数 §5.3 や，「基底」石村畑 線形代数 §5.4 でありさえすれば，同じことが言える

# ここまで来たよ

11 写像・平面の線形変換

12 線形変換による直線の像
- 線形変換の性質
- 部分集合の像，値域
- いろいろな線形変換

# 復習：平面上の直線のパラメタ表示

## $\vec{a}$ を通り $\vec{d}(\neq \vec{0})$ に平行な直線のパラメタ表示

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$$

すなわち $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　　($t \in \mathbb{R}$はパラメタ)

$\vec{d}$ を直線の方向ベクトル 石村畑 線形代数 p.16, 接 (線) ベクトル **教科書に追加** という.

## 線分のパラメタ表示 石村畑 線形代数 p.13

$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}\ (0 \leq t \leq 1)$
は平面 $\mathbb{R}^2$ 上の，$\vec{a}, \vec{b}$ を端点とする線分のパラメタ表示である.

$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + t\vec{d}$ と書き直すと，直線のパラメタ表示において，パラメタ $t$ の動く範囲 $\mathbb{R}$ を制限したものとみられる.
$0 \leq t \leq 1$ と限定する必要はない．$t_0 \leq t \leq t_1$ とすれば，$\vec{a} + t_0\vec{d}, \vec{a} + t_1\vec{d}$ を端点とする線分.

# 部分集合の像，値域

## 定義 (部分集合の像 )

写像 $f : X \to Y$ と，定義域の部分集合 $S \subset X$ に対して，
$\{f(x)|x \in S\} \subset Y$ を，$f$ による $S$ の像といい，$f(S)$ と書く．

既に定義したのは，一点 $x \in X$ の像 $f(x) \in Y$.

## 定義 (値域 (range) )

写像 $f : X \to Y$ に対して，
定義域 $X \subset X$ の像 $\{f(x)|x \in X\} \subset Y$ を $f$ の値域といい，$f(X)$ とと書く．

# 線形変換による直線の像

直線 $\ell$ のパラメタ表示を $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}\ (t \in \mathbb{R})$ とする．
すなわち，$\ell = \{\vec{a} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\}$.

その像のパラメタ表示は，
$f(\vec{a} + t\vec{d}) = f(\vec{a}) + tf(\vec{d})$.
$f(\vec{d}) \neq \vec{0}$ ならば，これは，$f(\vec{a})$ を通り，$f(\vec{d})$ に平行な直線のパラメタ表示．
すなわち，線形変換 $f$ による $\ell$ の像は，
$f(\ell) = \{f(\vec{a} + t\vec{d}) | t \in \mathbb{R}\} = \{f(\vec{a}) + tf(\vec{d}) | t \in \mathbb{R}\}$.

## 命題 (直線の像)

線形変換 $f$ で，直線 $\vec{p} = \vec{a} = t\vec{d}\ (t \in \mathbb{R})$ は，直線 $\vec{p} = f(\overrightarrow{a}) = tf(\vec{d})$ $(t \in \mathbb{R})$ に写る．（$f(\vec{d}) \neq \vec{0}$ なら）

## 命題

線形変換で線分は線分に写る，端点は端点に写る．（$f(\vec{d}) \neq \vec{0}$ なら）

原点を通る直線は，$\vec{d} \neq \vec{0}$ により，$\vec{p} = \vec{0} + t\vec{d}$ $(t \in \mathbb{R})$ とパラメタ表示できる．
その像のパラメタ表示は，$f(\vec{p}) = f(\vec{0} + t\vec{d}) = f(\vec{0}) + tf(\vec{d}) = \vec{0} + tf(\vec{d})$ $(t \in \mathbb{R})$.

**命題**

線形変換で，原点を通る $(\vec{a} = \vec{0})$ 直線は原点を通る直線に写る．
$(f(\vec{d}) \neq \vec{0}$ なら$)$

L12-Q1

## Quiz(パラメタ表示された直線の線形変換による像)

パラメタ表示

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

をもつ $\mathbb{R}^2$ の直線 $\ell$ を考える.

1. 直線 $\ell$ を描こう.
2. 直線 $\ell$ 上の点を 2 つ見つけよう（$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ とする）.
3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される線形変換 $f$ による $\ell$ の像のパラメタ表示を求め，描こう.
4. 像 $f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2)$ を求めよう.

mobius　IH2.5.30

# ここまで来たよ

11 写像・平面の線形変換

12 線形変換による直線の像
- 線形変換の性質
- 部分集合の像，値域
- いろいろな線形変換

# $\mathbb{R}^2$ のいろいろな線形変換

## 例

- $x$ 軸に関する鏡映変換 (reflection) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $y$ 軸に関する鏡映変換 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 直線 $y = x$ に関する鏡映変換 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

## 例

- 原点に関する反転変換 (inversion) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- 相似比 $k$ のスケール変換 (scaling) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kE$
- 恒等変換 (identitty) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 例 (回転変換 石村畑 線形代数 p.259)

- 一般角 $\theta$ の回転変換 (rotation) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

# 線形変換の合成

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L13(2025-05-23 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-23 Fri 12:16 JST hig"

今日の目標

- 線形変換の合成変換の表現行列が，表現行列の積であることを説明できる 石村畑 線形代数 p.192
- 平面の回転変換の表現行列を使える 石村畑 線形代数 p.49,p.212

L12-Q1

## Quiz 解答: パラメタ表示された直線の線形変換による像

1. 略
2. 例えば $t = 0, 1$ に対して，$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{p} = f(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix})t + f(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ すなわち $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$.
4. $f(\vec{x}_1) = A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, f(\vec{x}_2) = A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. これらは，$f$ による $\ell$ の像の上にある $(t = 0, 1)$.

# ここまで来たよ

12 いろいろな線形変換

13 線形変換の合成
- 線形変換の合成
- 回転変換

# 最初にまとめ

| 写像・変換の言葉 (一般的) | 行列・ベクトルの言葉 |
|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ の点 $\vec{x}$ | 2 次元ベクトル $\vec{x}$ |
| $\mathbb{R}^2$ の線形変換 $f$<br>$\vec{x}$ の像は $f(\vec{x})$ | 2 次正方行列 $A$<br>行列とベクトルの積 $A\vec{x}$ |
| 線形変換 $f, g$ の合成変換 $g \circ f$<br>$\vec{x}$ の像は $g(f(x))$ | 行列の積 $BA$<br>行列とベクトルの積 $B(A\vec{x})$ |

# 線形変換の合成

## 定義 (合成写像 石村畑 線形代数 定理 5.7.3)

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ があるとき, $x \in X$ を，まず $f$, 次に $g$ で写すことで像を得る写像

$$h : X \to Z$$

を考え，$h = g \circ f$ と書く.
$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ である.
この $h$ を, $f$ と $g$ の合成写像 (composition) という.

- $X = Y = Z$ なら, $f, g, h$ は $X$ の変換. $h$ は合成変換
- $Z = Y = Z = \mathbb{R}$ なら $f, g$ は関数, $h$ は合成関数

合成写像は $f, g$ の順序による
$f$ と $g$, $g$ と $f$ の合成写像は異なる. $g \circ f \neq f \circ g$.

L13-Q1

## Quiz(写像の合成)

$\mathbb{R}$ の変換 $f, g$ を考える.

$$f : x \mapsto \sin x,$$
$$g : x \mapsto x^2 + 3.$$

1. 実数 $x$ を, まず $f$ で写し, 次に $g$ で写した像を答えよう.
2. 実数 $x$ を, まず $g$ で写し, 次に $f$ で写した像を答えよう.
3. 合成変換 $g \circ f$ の像 $(g \circ f)(x)$ を求めよう.
4. 合成変換 $f \circ g$ の像 $(f \circ g)(x)$ を求めよう.

L13-Q2

## Quiz(線形変換の合成と行列の積)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換を考える.

1. $x$ 軸に関する鏡映変換 $f$ を表す行列 $A$ を求めよう.
2. 直線 $y = -x$ に関する鏡映変換 $g$ を表す行列 $B$ を求めよう.
3. 行列の積 $BA$ を計算しよう.
4. 行列の積 $AB$ を計算しよう.
5. 点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を，まず $f$ で，次に $g$ で写した像を求めよう（順に写す，行列を一度にかける，の 2 つの方法で).
6. 点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を，まず $g$ で，次に $f$ で写した像を求めよう（順に写す，行列を一度にかける，の 2 つの方法で).

mobius IH2.5

# 線形変換の合成変換

線形変換 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が，2 次正方行列 $A, B$ で表されるとする．

まず $f$, 次に $g$

まず，$\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ を $f$ で写す

$f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

次にこれを，$g$ で移動

$g(f(\vec{x})) = B(A\vec{x})$

合成写像の定義より

$g(f(\vec{x})) = (g \circ f)(x)$.

行列の積の性質より

$B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x}$.

合成変換 $g \circ f$ は行列 $BA$ により表現される

まず $g$, 次に $f$

まず，$\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ を $g$ で写す

$g(\vec{x}) = B\vec{x}$.

次にこれを，$f$ で移動

$f(g(\vec{x})) = A(B\vec{x})$

合成写像の定義より

$f(g(\vec{x})) = (f \circ g)(x)$.

行列の積の性質より

$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$.

合成変換 $g \circ f$ は行列 $BA$ により表現される

## 命題 (合成変換の表現行列 石村畑 線形代数 定理 5.7.3)

線形変換 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を表現する行列をそれぞれ $A, B$ とする．
まず $g$ で写す合成変換 $f \circ g$ を表現する行列は $AB$ である．$\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ の像は $f(g(\vec{x})) = (AB)\vec{x}$ である．
まず $f$ で写す合成変換 $g \circ f$ を表現する行列は $BA$ である．$\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ の像は $g(f(\vec{x})) = (BA)\vec{x}$ である．

## 3 個以上の写像の合成,3 個以上の行列の積

石村畑 線形代数 p.194

$f, g, h$ を写像とする.
任意の $x \in X$ に対して,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)), \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x))$$

$\rightsquigarrow$ 3 個の合成写像は，2 個ずつの合成をどの順序でしても，像は同じ.

写像の結合法則 (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

この両辺を, 便利な記号として, $h \circ g \circ f$ と書いちゃう.

$f, g, h$ が線形変換とし, これらを表す行列を $A, B, C$ とする.
$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ の表す行列を考えて,
当然，表現する行列も同じになるべき．行列の積の結合則

石村畑 線形代数 p.194

として既に知っていた.
$C(BA) = (CB)A$.

L13-Q3

## Quiz(線形変換の合成)

最初に直線 $y = x$ に関する鏡映, 次に原点を中心とする反時計まわりの角 $\frac{1}{4}\pi$ の回転, 最後に $y$ 軸に関する鏡映を行う.

1. 3 つの線形変換それぞれを表す行列を書こう
2. 3 つの線形変換の合成変換を表す行列を書こう

石村畑 線形代数 問題 49(p.192) mobius IH2.5

# ここまで来たよ

12 いろいろな線形変換

13 線形変換の合成
- 線形変換の合成
- 回転変換

# 回転変換

## 例 (回転変換)

原点のまわりに，反時計まわりに一般角 $\theta$ だけ回転移動する線形変換 $f_\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) を表す行列 (回転行列) は

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

なぜなら, 線形変換であることを仮定して,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

から 行列 $R_\theta$ を決めるとそうなる.

覚え方

自分の言葉でどうぞ

# 弧度法（ラジアン, radian）

| 度 $d^\circ$<br>ラジアン $\theta$ | $0^\circ$<br>$0$ | $30^\circ$<br>$\pi/6$ | $90^\circ$<br>$\pi/2$ | $180^\circ$<br>$\pi$ | $360^\circ$<br>$2\pi$ | $d^\circ$<br>$\theta = \frac{d}{180}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | 半径 $r$, 頂角 $\theta$ の扇型 | 半径 $r$ の円 |
|---|---|---|
| 円弧長 | $r\theta$ | $r \cdot 2\pi = 2\pi r$ |
| 面積 | $\frac{1}{2}r^2\theta$ | $\frac{1}{2}r^2 2\pi = \pi r^2$ |

回転の文脈で，$\theta$ を測る向きが明示されていないときは反時計まわりと思おう．そうしないと，$y = \sin\theta$ にならない．

## 命題 (回転行列の合成)

$R_\theta$ を 2 次元の回転行列とするとき，$R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$.

証明 加法定理

## 定理 (回転行列の $n$ 乗 石村畑 線形代数 定理 2.4.2)

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (回転行列) のとき，$R_\theta^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = R_{n\theta}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

現時点では $n \geq 0$.

# 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L14(2025-05-28 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-28 Wed 07:20 JST hig"

## 今日の目標

- 1,2,3 次元の行列式を計算できる 石村畑 線形代数 §3.1
- 1,2,3 次元の行列式が，線形変換の，長さ，面積，体積拡大率の意味を持つことを説明できる

線形代数☆演習 I(2025)L03 線形代数☆演習 I(2025)L04 線形代数☆演習 I(2025)L05

## L13-Q1

## Quiz 解答: 写像の合成

1. $f(x) = \sin x$. $g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3$.
2. $g(x) = x^2 + 3$. $f(g(x)) = \sin(x^2 + 3)$.
3. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 + 3$.
4. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^2 + 3)$.

## L13-Q2

## Quiz 解答: 線形変換の合成と行列の積

1. $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$.
   $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $(g \circ f)(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.
6. $(f \circ g)(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

## L13-Q3
## Quiz 解答: 線形変換の合成

1. 直線 $y = x$ に関する鏡映変換 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. 角 $\frac{1}{4}\pi$ の回転変換 $B = R_{\frac{1}{4}\pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. $y$ 軸に関する鏡映変換 $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $CBA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = R_{\pi/4}$.

# 区別しよう

- まず $f$, 次に $g$(まず $A$, 次に $B$) は，$g \circ f$ で写す ($BA$ を左からかける)
- 行列とベクトルは違う
- 写像と行列は違う
- 集合と点は違う

# ここまで来たよ

13 線形変換の合成変換

14 行列式
- 1,2,3 次元の行列式

# 行列式 (determinant) 石村畑 線形代数 §3.0

## 定義 (1 次正方行列の行列式 石村畑 線形代数 §3.1)

成分が実数の 1 次正方行列全体 $\mathcal{M}(1,1)$ から，実数 $\mathbb{R}$ への，次の写像を，行列式 (determinant) という．

$\det : \mathcal{M}(1,1) \to \mathbb{R}$

$\det : A = (a) \mapsto a$

変な名前… 式でも行列でもない．値も数．

写像だから $\det(A) = a$ と書きそうだが，括弧を略して，$\det A = a$ とも $(\sin(\pi/2) = \sin \pi/2 = 1$ のように

長さ拡大率

長さ $|x|$ の 1 次元ベクトル $\vec{x} = (\,x\,)$ は，$A = (a)$ で表される線形変換により，$a\vec{x} = (\,ax\,)$ に写る．

## 命題 (長さ拡大率としての 1 次行列式)

$\mathbb{R}$ の長さ 1 の線分は，$A$ の表す線形変換により，$|\det A|$ 倍に拡大される

$\det A > 0$ なら同じ向き，$\det A < 0$ なら逆向き．

$\det A = 0$ なら 1 点 $\vec{0}$

## 定義 (2 次正方行列の行列式 石村畑 線形代数 §3.1)

成分が実数の 2 次正方行列全体 $\mathcal{M}(2,2)$ から，実数 $\mathbb{R}$ への，次の写像を，行列式 (determinant) という．

$\det : \mathcal{M}(2,2) \to \mathbb{R}$

$\det : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$

$n$ 次すべてに同じ名前 $\det$ を流用．

写像の値 $\det(A)$ を「$A$ の行列式」という．

$\det(A) = ad - bc$ と書きそうだが，略して，$\det A = ad - bc$,

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ とも書く．

$\det A = |A| = ad - bc$ とも書く．さらに略して，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ とも書く．

無理に行列式の絶対値と書きたいときは，

$Bigl|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\Bigr|$

# $ad-bc$ との出会い

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

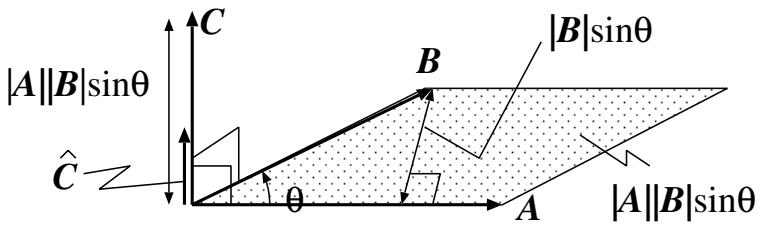
- $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のとき，三角形 OAB の面積は $\frac{1}{2}|ad-bc|$，平行四辺形 OABC の面積は $|ad-bc|$. 石村畑 線形代数 p.7
- $ad-bc\neq 0$ なら $A$ は正則（逆行列を持つ），$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $ad-bc=0$ なら逆行列を持たない． 石村畑 線形代数 定理 2.3.2
- $A^2-(a+d)A+(\det A)E=O$. 石村畑 線形代数 定理 2.4.1(ケーリー・ハミルトン)

## 平行四辺形の面積

$\vec{a}=(a,c,0), \vec{b}=(b,d,0)\in\mathbb{R}^3$ の外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の絶対値（長さ）$|\vec{a}\times\vec{b}|$ は，$\vec{a},\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい． 線形代数☆演習 I(2025)L03

線形代数☆演習 I(2025)L04

$(a,c,0)\times(b,d,0)=(0,0,ad-bc)$.



# 面積拡大率

原点を始点とする 2 次元ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を 2 辺とする面積 1 の正方形は，
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される線形変換 $f$ により，
$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を 2 辺とする平行四辺形 (面積 $|\det A|$) に写される．

## 命題 (面積拡大率としての 2 次行列式)

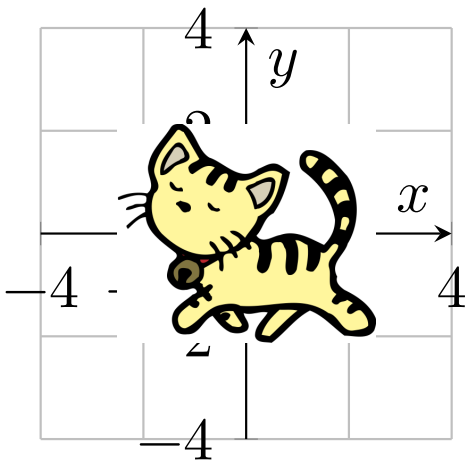
$\mathbb{R}^2$ の $1 \times 1$ 正方形の面積は，$A$ で表される線形変換により，$|\det A|$ 倍に拡大される

$\det A > 0$ なら表向き，$\det A < 0$ なら裏返し．
$\det A = 0$ ならつぶれる

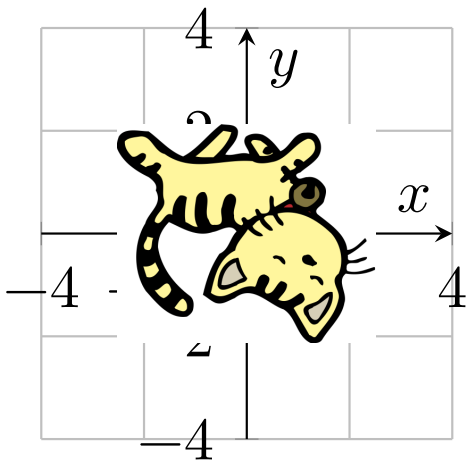
石村畑 線形代数 Column(p.263)

# 面積拡大率 I

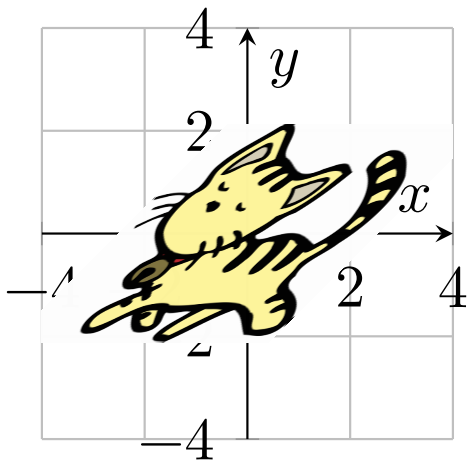
元の画像



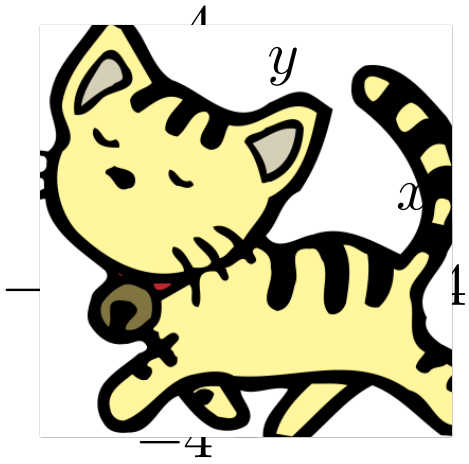

面積拡大率 1, 表向き



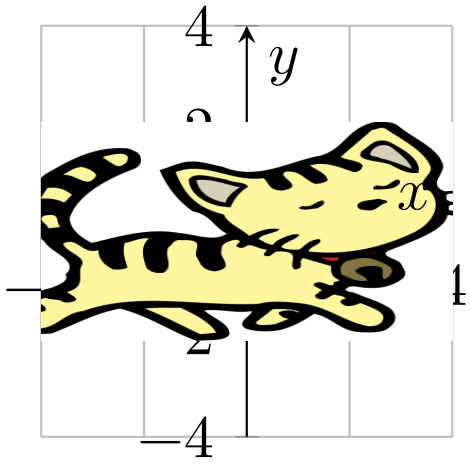

原点に関する反転 面積拡大率 1, 表向き



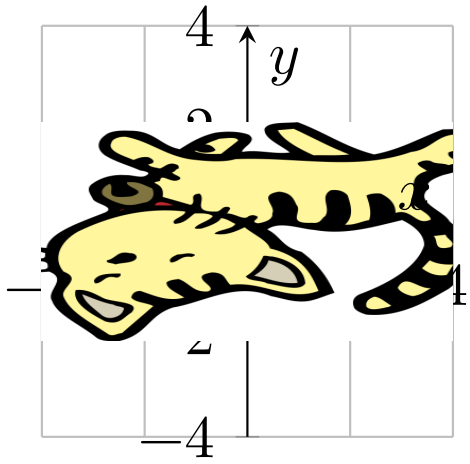

相似比 2 のスケール変換 面積拡大率 4, 表向き




面積拡大率 2, 裏向き




面積拡大率 2, 裏向き



## L14-Q1

### Quiz(2 次の行列式)

$A$ を 2 次正方行列，$k \in \mathbb{R}$ とする．次の行列式を $\det A$ で表そう．途中では必要なら $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$, とおいて計算すること．

1. $\det O_{22}$
2. $\det kE_2$
3. $\det kA$
4. $\det(A + A)$
5. $\det A \neq 0$ のとき，$\det(A^{-1})$

L14-Q2

## Quiz(2 次の行列式)

$\mathbb{R}^2$ の，次の線形変換を表す行列の行列式を求めよう．

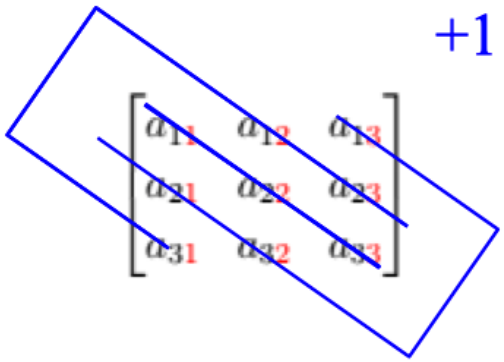
1. 角 $\theta$ の回転変換
2. 恒等変換
3. $x$ 軸に関する鏡映変換
4. 直線 $y = x$ に関する鏡映変換
5. 原点に関する反転変換
6. 相似比 $3$ のスケール変換
7. 相似比 $1/3$ のスケール変換

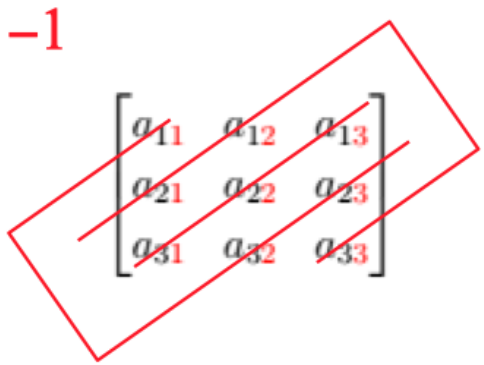
## 定義 (3 次正方行列の行列式 石村畑 線形代数 §3.1)

成分が実数の 3 次正方行列全体 $\mathcal{M}(3,3)$ から，実数 $\mathbb{R}$ への，次の写像を，行列式 (determinant) という．

$\det : \mathcal{M}(3,3) \to \mathbb{R}$

$$\det : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{aligned} &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$




サラスの公式

## L14-Q3

### Quiz(行列式)

次の行列式の値を求めよう．これらの表す線形変換は，面積，体積を何倍にするか，表向き裏向き（鏡像）いずれに写すか．

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

mobius IH3.1 石村畑 線形代数 問題 12, 問題 13

# 3 次の $\det A$ との出会い

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ のとき，

スカラー 3 重積 線形代数☆演習 I(2025)L04 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}$.

## 命題 (スカラー 3 重積と 3 次の行列式の関係)

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ のスカラー 3 重積と，

横ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を重ねて書いて作った 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}$ の行列式，縦ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を並べて書いて作った 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$ の行列式とは等しい．

スカラー 3 重積の絶対値 $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ は，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積．

スカラー 3 重積の符号 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$ なら右手系，$< 0$ なら左手系．

原点を始点とする右手系の 3 次元ベクトル
$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, を 3 辺とする体積 1 の立方体は，
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
で表される線形変換 $f$ により，
$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ を 3 辺とする平行六面体に写される．

**命題 (体積拡大率としての 3 次行列式)**

$\mathbb{R}^3$ の $1 \times 1 \times 1$ 立方体の体積は，$A$ で表される線形変換により，$|\det A|$ 倍に拡大される

$\det A > 0$ なら右手系のまま，$\det A < 0$ なら鏡像がとられて左手系になる．
$\det A = 0$ ならつぶれる

# 線形変換の逆変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L15(2025-05-30 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-05-30 Fri 07:16 JST hig"

今日の目標

- 線形変換の逆変換の表現行列が，表現行列の逆行列であることを説明できる **教科書に追加**

## L14-Q1

### Quiz 解答:2 次の行列式

1. $\det O_{22} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$
2. $\det kE_2 = k \cdot k - 0 \cdot 0 = k^2$
3. $\det kA = ka \cdot kd - kb \cdot kc = k^2 \det A$
4. $\det(A + A) = \det 2A = 4 \det A$
5. $\det A \neq 0$ のとき,
   $\det(A^{-1}) = \det\left(\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right) = (\det A)^{-2} \det A = (\det A)^{-1}$.

## L14-Q2

### Quiz 解答:2 次の行列式

1. $1$.
2. $1$.
3. $-1$.
4. $-1$.

5. $1$
6. $3^2$.
7. $3^{-2}$.

## L14-Q3
## Quiz 解答: 行列式

1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = -13$. 面積を 13 倍にする．$-13 < 0$ より裏向きに写す．
2. サラスの公式より，
$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 5 - 0 - 5 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 3$
$= 0 + 9 + 25 - 0 - 10 - 6 = 18.$
18 倍にする．$18 > 0$ よりそのまま（表向きのまま，右手系を保って）写す．

# ここまで来たよ

14 行列式

15 線形変換の逆変換
- 逆変換

# 最初にまとめ

| 写像・変換の言葉 (一般的) | 行列・ベクトルの言葉 |
|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ の点 $\vec{x}$ | 2 次元ベクトル $\vec{x}$ |
| $\mathbb{R}^2$ の線形変換 $f$ | 2 次正方行列 $A$ |
| $\vec{x}$ の像 $f(\vec{x})$ | 行列とベクトルの積 $A\vec{x}$ |
| 線形変換 $f, g$ の合成変換 $g \circ f$ | 行列の積 $BA$ |
| 線形変換 $f$ の逆変換 $f^{-1}$ | 逆行列 $A^{-1}$ |

# 写像の逆像

写像 $f : X \to Y$,　　$X$: 定義域, $Y$: 終域

## 定義 (復習：部分集合の像 線形代数☆演習 I(2025)L12)

写像 $f : X \to Y$ と，定義域の部分集合 $S \subset X$ に対して，
$\{f(x)|x \in S\} \subset Y$ を，$f$ による $S$ の像といい，$f(S)$ と書く．

## 定義 (集合の逆像 教科書に追加)

部分集合 $T \subset Y$ に対して，$X$ の部分集合 $\{x \in X|f(x) \in T\}$ を，$f$ による $T$ の逆像といい，$f^{-1}(T)$ とかく．

# 方程式の解と逆像

「連立 1 次方程式 $\begin{matrix} x+y= & 9 \\ 2x+3y= & 23 \end{matrix}$ を解け」「解は $(x,y)=(4,5)$」は，
「$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ で表される線形変換 $f$ による，1 点からなる集合 $\{\left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 23 \end{smallmatrix}\right)\}$の逆像を求めよ」「$\{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)\}$」に相当．

線形代数☆演習 I(2025)L21

後者はつねに部分集合で答える．前者は，有限個の点なら列記，「解なし」「不定」など，一貫しない答え方が正解とされる伝統芸．

例 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は，零行列 $O_{22}$ で表される線形写像（線形変換）．
$f^{-1}(\{\vec{0}\})=\mathbb{R}^2=X$.「不定」
$f^{-1}(\{\left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 23 \end{smallmatrix}\right)\})=\mathbb{R}^2=\emptyset$. (空集合)「解なし」

# 逆写像（が存在するとき）

任意の 1 点集合 $\{y\}$ の逆像が必ず 1 点集合 $\{x\} = f^{-1}(\{y\})$ になる稀できれいなケースでは，便利な，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が定義できる．

## 定義 (復習：値域 (range) 線形代数☆演習 I(2025)L12)

定義域の像 $f(X) = \{f(x)|x \in X\} \subset Y$ を $f$ の値域という．

## 定義 (上への (onto) 写像, 全射 (surjection))

$f$ は $X$ から $Y$ の上への写像 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 値域=終域

## 定義 (1 対 1 の (one-to-one) 写像, 単射 (injection))

$f$ は 1 対 1 の写像 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

## 定義 (全単射 (bijection))

$f$ が全単射 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $f$ が $Y$ の上への 1 対 1 の写像

## 定義 (逆写像 (inverse map))

$f : X \to Y$ が全単射のとき,
$Y$ の各要素 $y$ に対して $f(x) = y$ となる $X$ の要素がただひとつ定まる.
$g : y \mapsto x$ で写像 $g : Y \to X$ を定める.
$g$ を $f$ の逆写像といい, $f^{-1}$ とかく.

$$\begin{aligned} f^{-1} &: Y && \to X \\ f^{-1} &: y = f(x) && \mapsto x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

変換なら 逆変換, $X, Y$ が $\mathbb{R}$ の部分集合なら 逆関数
写像・関数の肩の $^{-1}$ は (逆数ではなく) 逆写像・逆関数

L15-Q1

## Quiz(逆変換)

1. $\mathbb{R}$ の変換 $f : x \mapsto 3x$ に逆変換があれば求めよう.
2. $\mathbb{R}$ の変換 $g : x \mapsto x^2$ に逆変換があれば求めよう.
3. $\mathbb{R}$ の変換 $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ に逆変換があれば求めよう.

L15-Q2

## Quiz(逆変換)

1. $\mathbb{R}$ の変換 $f : x \mapsto x^3$ に逆変換があれば求めよう.
2. $\mathbb{R}$ の変換 $f : x \mapsto (x-2)^3 + 3$ に逆変換があれば求めよう.

# 逆写像の性質

## 命題 (逆写像の逆写像)

逆写像の逆写像はもとの写像. すなわち $(f^{-1})^{-1} = f$

## 定義 (恒等写像 (恒等変換))

$\mathrm{id}_X : X \to X$
$\mathrm{id}_X : x \mapsto x.$

## 命題 ($\mathbb{R}^2$ の恒等変換)

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ は線形変換で, 単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表される.

## 命題 (逆写像の性質)

$f : X \to Y$ が 1 対 1 で上への写像のとき, 逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在し,
$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$
$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

# 線形変換の逆変換

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 線形変換，行列 $A$ で表現，
$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ その逆変換，とする．
逆写像の性質より，
$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}, f^{-1} \circ f = \mathrm{id}.$
逆変換も線形変換で，行列 $X$ で表されるなら，
$AX = E,\ XA = E.$
すなわち，$X = A^{-1}$ (逆行列)
実際，逆行列で表現される変換が逆変換になっている．

## 命題 (逆変換の表現行列 教科書に追加)

線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を表現する行列を $A$ とする．
$f$ が全単射で逆変換 $f^{-1}$ が存在するとき，
逆変換 $f^{-1}$ を表現する行列は逆行列 $A^{-1}$ である．
逆行列 $A^{-1}$ が存在するなら，逆変換 $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ が存在する．

$$A^{-1}f(\vec{x}) = A^{-1}A\vec{x} = E\vec{x} = \vec{x}$$

L15-Q3

## Quiz(逆行列の逆行列)

正則行列 $A$ の逆行列 $X = A^{-1}$ の逆行列 $X^{-1} = (A^{-1})^{-1}$ はもとの行列 $A$ であることを（正則行列の指数法則でなく）逆行列の定義から示そう.

L15-Q4

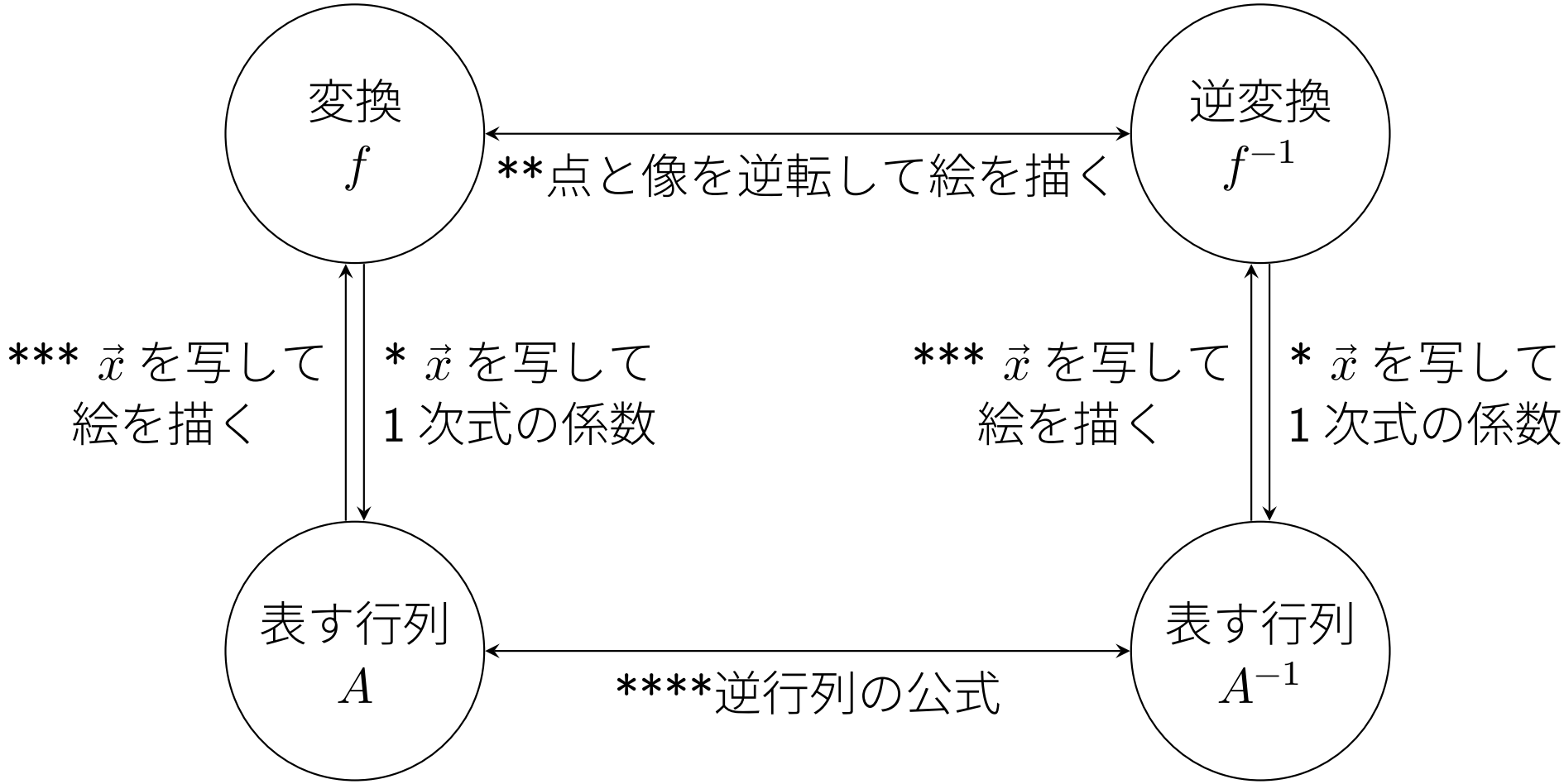
## Quiz(線形変換の逆像)

変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ で表される.
逆像 $f^{-1}(\{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\})$ を求めよう.

mobius　IH2.5

# 線形変換の逆変換，それを表す行列を求める方法

チーム課題対応



# 線形変換の逆変換を求める方法

L15-Q5

TA Prob and Sol: 線形変換の逆変換

$\mathbb{R}^2$ において，$y$ 軸に関する鏡映 $f$ の逆変換 $f^{-1}$ を (日本語で) 求めよう．

略解

***変換 (日本語) から行列**任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，
(必要なら絵を描いて) 鏡映 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ より，$f$ を表す行列は
$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*****逆行列の公式** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

****行列から変換 (日本語)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. (必要なら絵を描いて) $A^{-1}$ の表すのは「$y$ 軸に関する鏡映」

****変換から変換 (日本語) に直接**
任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，
鏡映 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ なので，$f^{-1}(\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
$-x$ を $x'$ と置き直すと，任意の $\begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix}$ に対して，
$f^{-1}(\begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -x' \\ y \end{pmatrix}$ すなわち，$f^{-1}$ は「$y$ 軸に関する鏡映」

# 合成変換の逆変換

写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ が全単射であるとき，$g \circ f$ も全単射.
逆写像 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

## 命題 (合成写像の逆写像)

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線形変換で，行列 $A, B$ で表されるとき，
合成写像を $g \circ f$ を表す行列は $BA$.
逆写像 $(g \circ f)^{-1}$ を表す行列は，$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

# 回転変換の逆変換

平面の原点を中心とする反時計まわりの角 $\theta$ の回転変換 $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を表すのは，
回転行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} +\cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix}$.
その逆変換を表す行列は，逆行列
$R_\theta^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta - (-\sin\theta)\sin\theta} \begin{pmatrix} +\cos\theta & -(-\sin\theta) \\ -\sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix} = R_{-\theta}$.

L15-Q6

## Quiz(合成変換の逆変換)

平面の線形変換で，まず原点中心の $\pi/3$ の回転，次に $y$ 軸に関する鏡映を行う合成変換を考える．この合成変換の逆変換を表す行列を求めよう．

# 3 次元の回転行列とオイラー角

2 次元の回転行列は 1 パラメタ $\theta$ で $R_\theta$.
3 次元の任意の回転は, 3 パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).
オイラー角 $\psi, \theta, \phi$ にとることが多い.
3 次元の回転行列は, 角 $\psi, \theta, \phi$ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

`http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html`

# 4 次以上の行列式の再帰的定義と余因子展開

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L16(2025-06-04 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-04 Wed 08:18 JST hig"

## 今日の目標

- 行列式の定義を説明できる 石村畑 線形代数 §3.2
- 4 次以上の行列式を余因子展開で計算できる
  石村畑 線形代数 §3.2
- 対角行列，上下三角行列の行列式を計算できる
  **教科書に追加**

## L15-Q1

### Quiz 解答: 逆変換

1. 全単射になっている. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{3}x$.
2. $g$ は全射でも単射でもないので, $g^{-1}$ は存在しない.
3. $h$ は全射ではない (単射ではある) ので, $h^{-1}$ は存在しない ($\log x$ の定義域は $\mathbb{R}$ 全体ではない).

## L15-Q2

### Quiz 解答: 逆変換

1. 全単射になっている. $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

2

$$
\begin{aligned}
y &= (x-2)^3 + 3 \\
(x-2)^3 &= y - 3 \\
x - 2 &= \sqrt[3]{y-3} \\
x &= \sqrt[3]{y-3} + 2
\end{aligned}
$$

よって，$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-3} + 2 = \begin{cases} (-(x-3))^{1/3} + 2 & (x < 3) \\ (x-3)^{1/3} + 2 & (x \geq 3) \end{cases}$

L15-Q3

## Quiz 解答: 逆行列の逆行列

$X$ は $A$ の逆行列なので，定義より，$AX = XA = E$. 逆行列の定義より，$A$ は $X$ の逆行列.

L15-Q4

## Quiz 解答: 線形変換の逆像

$A$ は正則なので逆変換 $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が存在し，逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ で表される.

$A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

よって，逆像 $f^{-1}(\{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\}) = \{\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\}$.

L15-Q5 略

L15-Q6

## Quiz 解答: 合成変換の逆変換

$$\left(\begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos -\pi/3 & -\sin -\pi/3 \\ \sin -\pi/3 & \cos -\pi/3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

# ここまで来たよ

15 線形変換の逆変換

16 4 次以上の行列式の再帰的定義と余因子展開
- 行列式の再帰的定義
- 行列式の余因子展開
- 対角行列・三角行列の行列式

# 余因子

## 定義 (小行列式と余因子 石村畑 線形代数 p.60)

$A$: $n$ 次の正方行列 のとき,
$A$ の $(i,j)$ 小行列式 (minor) $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, $A$ から第 $i$ 行, 第 $j$ 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.
$A$ の $(i,j)$ 余因子 (adjugate) $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

$(i,j)$ 小行列式にかけられる符号=$(i,j)$ 余因子に含まれる符号

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

小行列 (submatrix) は, 1 行 1 列とは限らず複数の行と列を取り除いて得られる行列 (行列式でなく) をさす言葉. 部分行列?

例 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} =$ , $\begin{matrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{matrix} =$ .

$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$.

石村畑 線形代数 問題 14　mobius　IH3.2

## 定義 (行列式 石村畑 線形代数 p.64)

$n$ 次の行列式を，次で帰納的に定める．

- $n = 1$ 次正方行列 $(a)$ の行列式を $\det((a)) = a$ と定める．
- $n$ 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の行列式を，余因子 (=$n-1$ 次の行列の行列式) を用いて，$j = 1$ 列に対して，次のように定める．

$$\det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j} \tilde{a}_{\ell j}$$

$$n \text{ 次行列式 } = \text{成分} \times (n-1 \text{ 次行列式}) + \ldots$$

$$\text{体積 } = \text{高さ} \times \text{面積}$$

実は $2 \leq j \leq n$ や，行でも同値な定義になっている $\rightsquigarrow$ 余因子展開

帰納的定義 (inductive) 元，集合の定義を，ひとつ前の定義に帰着させる．

再帰的定義 (recursive) もほぼ同じ意味

プログラミング実習

例

すでにした 2,3 次の定義と矛盾しない．$n$ 次の行列式は $n!$ 項からなる (数学的帰納法)．

L16-Q1

## Quiz(4 次の行列式の余因子展開)

行列を考える．$B = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$ を考える．

1. $B$ の行列式を，定義にしたがって計算しよう．
2. $B$ の行列式を，第 1 列に関して余因子展開しよう．
3. $B$ の行列式を，第 4 行に関して余因子展開しよう．

# ここまで来たよ

15 線形変換の逆変換

16 4 次以上の行列式の再帰的定義と余因子展開
- 行列式の再帰的定義
- 行列式の余因子展開
- 対角行列・三角行列の行列式

# 行列式の余因子展開

展開 (expansion) 1 個の複雑なものを, 単純なもの複数の和として書くこと

## 定理 (余因子展開 石村畑 線形代数 p.65)

$A = (a_{ij})$ を $n$ 次の正方行列
$\tilde{a}_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ 余因子 とするとき,

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{i\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{\ell j}$. ($j$ 列目における余因子展開)

$(i,j)$ 小行列式にかけられる符号=$(i,j)$ 余因子に含まれる符号 $=\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

どこかの 1 行, またはどこかの列を選んで展開する. $n$ 項の和になる.
第 3 行についての展開 ( ., • はつめて, $n-1$ 次の行列式を計算)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = +31 \begin{vmatrix} . & 12 & 13 & 14 \\ . & 22 & 23 & 24 \\ \bullet & . & . & . \\ . & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} - 32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 33 \begin{vmatrix} 11 & 12 & . & 14 \\ 21 & 22 & . & 24 \\ . & . & \bullet & . \\ 31 & 32 & . & 44 \end{vmatrix} - 34 \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & . \\ 21 & 22 & 23 & . \\ . & . & . & \bullet \\ 31 & 32 & 43 & . \end{vmatrix}.$$

第 2 列についての展開

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} . & \bullet & . & . \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 22 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} - 32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 42 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ . & \bullet & . & . \end{vmatrix}.$$

石村畑 線形代数 問題 15–18　mobius　IH3.2

# ここまで来たよ

15 線形変換の逆変換

16 4 次以上の行列式の再帰的定義と余因子展開
- 行列式の再帰的定義
- 行列式の余因子展開
- 対角行列・三角行列の行列式

## 定義 (上三角行列・下三角行列 石村畑 線形代数 p.50)

$n$ 次正方行列 $A$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$ とする.

- $A$ が上三角行列 (upper triangular matrix) $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
  $(\forall i,j \quad i>j \Rightarrow a_{ij}=0)$
  「対角成分の右上以外はゼロ」
- $A$ が下三角行列 (lower triangular matrix) $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall i,j \quad i<j \Rightarrow a_{ij}=0)$
  「対角成分の左下以外はゼロ」

## 命題 (対角行列と三角行列 教科書に追加)

- 正方零行列，単位行列は対角行列である.
- $A$ は対角行列 $\Leftrightarrow$ $A$ は上三角行列，かつ下三角行列.

## 命題 (上三角・下三角行列の行列式の値 教科書に追加)

上三角行列・下三角行列の行列式は，対角成分の積である

上三角行列のみ示す．行列の次数 $n$ に関する数学的帰納法による．

1. $n = 1$ 次の上三角行列 $U_1 = (d)$ に対して，$\det(U_1) = d$ より成立．
2. $n = k$ 次の上三角行列に対して成立するとする．

   $n = k+1$ 次の上三角行列の行列式 $\det(U_{k+1}) = \det \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ & d_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & d_{k+1} \end{pmatrix}$

   （空白の成分はゼロ）を第 1 列で展開すると，

   $\det(U_{k+1}) = d_1 \times \det U_k = d_1 \times \det \begin{pmatrix} d_2 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & d_{k+1} \end{pmatrix}$ と，$k$ 次の上三角行列 $U_k$ の行列式が現れる．

   帰納法の仮定により，$k$ 次の上三角行列 $U_k$ の行列式は，$d_2 \ldots d_{k+1}$．

   よって，$\det(U_{k+1}) = d_1 \ldots d_{k+1}$．$n = k+1$ のときも成立する．

一般に成立する．

L16-Q2

## Quiz(行列式の余因子展開と三角行列の行列式)

次の行列式の値を求めよう.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & 2 & 23 & 25 & 21 \\ b & 3 & 17 & 15 & 45 \\ 0 & 0 & 5 & 31 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

# 行列式の性質 1

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L17(2025-06-06 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-06 Fri 11:07 JST hig"

今日の目標

- 行列式の行，列多重線形性，行，列交代性を説明できる 石村畑 線形代数 §3.3
- 性質 R1–R5,C1–C5 石村畑 線形代数 pp.80,81 を使って行列式を簡単化できる

## L16-Q1

### Quiz 解答:4 次の行列式の余因子展開

1. $\det B = 21\begin{vmatrix} 31 & 3 & 5 \\ 37 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 23 & 25 \\ 37 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 0 & 23 & 25 \\ 31 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} - 13\begin{vmatrix} 0 & 23 & 25 \\ 31 & 3 & 5 \\ 37 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \cdots = -3893.$
2. 上の答の最初の等号まで.
3. $\det B = -13\begin{vmatrix} 0 & 23 & 25 \\ 31 & 3 & 5 \\ 37 & 9 & 11 \end{vmatrix} + 0 - 0 + 17\begin{vmatrix} 21 & 0 & 23 \\ 2 & 31 & 3 \\ 7 & 37 & 9 \end{vmatrix}.$

## L16-Q2

### Quiz 解答: 行列式の余因子展開と三角行列の行列式

第 1 列で余因子展開して,

$$\det A = a(-1)^2\begin{vmatrix} 3 & 17 & 15 & 45 \\ 0 & 5 & 31 & 29 \\ 0 & 0 & 7 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} + b(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 23 & 25 & 21 \\ 0 & 5 & 31 & 29 \\ 0 & 0 & 7 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11a - 2\cdot 5\cdot 7\cdot 11b.$$

# 転置行列

## 定義 (転置行列 石村畑 線形代数 §4.1(p.100))

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して，$n$ 行 $m$ 列の行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を $A$ の転置行列 (transposed matrix) といい，${}^{\mathrm{t}}A$ と書く.

$A$ の $t$ 乗 $A^t (t \in \mathbb{Z})$ と間違えないために, 左上に立体で頭文字 t とかく.

## 例 (転置行列)

縦ベクトルの転置は横ベクトル, 横ベクトルの転置は縦ベクトル.

$$ {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} $$

# 転置行列の性質

## 定理 (転置行列の性質)

$A, B$ を行列, $k \in \mathbb{R}$ とするとき,

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) &= A, \\
{}^{\mathrm{t}}(A+B) &= {}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B, \\
{}^{\mathrm{t}}(kA) &= k\,{}^{\mathrm{t}}A, \quad \text{以上まあ当たり前} \\
|{}^{\mathrm{t}}A| &= |A|, \quad \text{石村畑 線形代数 定理 4.1.2(p.100)} \\
{}^{\mathrm{t}}(AB) &= {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A. \quad \text{石村畑 線形代数 定理 4.1.1(p.100) 超重要}
\end{aligned}
$$

${}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

## 命題

行列式の行 (R=row) に対する性質は，行列式の列 (C=column) に対しても成立する.

# 行列式の性質

行について R1–5 石村畑 線形代数 p,80 ,ⓘ は行番号.
列について C1–5 石村畑 線形代数 p.81 ,ⓘ′ は列番号.

## 定理 (R1,R2: 行列式の行（多重）線形性 石村畑 線形代数 定理 3.3.1 )

$a_1, \dots, a_n, b_i$: 1 行 $n$ 列の行ベクトル

$$\forall i \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}, \qquad \text{(R1)}$$

$$\forall i \quad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}. \qquad \text{(R2: } ⓘ \times \tfrac{1}{k}\text{)}$$

## R1 の例

$$\begin{vmatrix} a+0 & 0+b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

両辺どちらで考えても $ad - bc$.

## R2 の例

$$|kE| = \begin{vmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{vmatrix} = \cdots = k^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

両辺どちらで考えても $k^n$.

## C1,C2 の例

$$\begin{vmatrix} a & \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}b \\ c & \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{1}{3}b \\ c & \frac{1}{3}d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \frac{2}{3}b \\ c & \frac{2}{3}d \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \frac{2}{3}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

両辺どちらで考えても $ad - bc$.

和とスカラー倍は，行列と行列式で，別の話をしている！
行列式 $|\bullet|$ は行ごと，行列 $(\bullet)$ は全成分．比較しよう．

- 行列の和 石村畑 線形代数 p.32

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_i+b_i \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- 行列のスカラー倍 石村畑 線形代数 p.32

$$\begin{pmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_i \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

# 線形性 (linearity)

## 定義 (線形性)

写像 $f$ が線形性を持つとは，次の性質をみたすこと．

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(ka) = kf(a)$$

(定数項なしの)1 次関数はこの性質を満たす．2 次関数は満たさない．
「行列式は，多重線形性を持つ」
多重=1 行 ... $n$ 行
1 次の=線形の=linear
2 次の=quadratic
3 次の=cubic

## R1 の証明

$\det C = \det A + \det B$ とかく．

$n = 1$ 成立

$n \geq 2$ のとき，$i$ 行について余因子展開して，

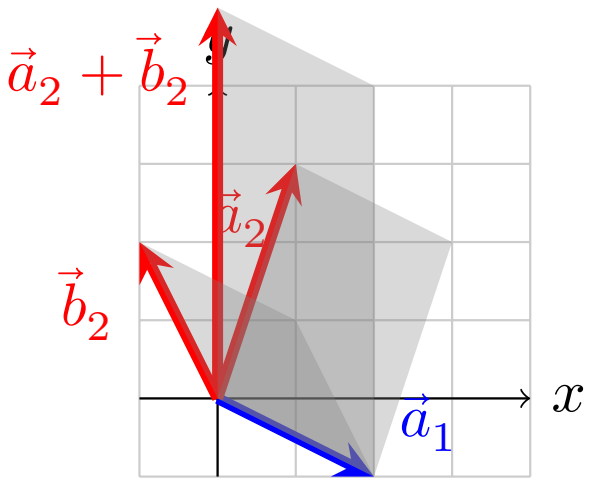
$$\begin{aligned}\det C =& (a_{i1} + b_{i1})\tilde{c}_{i1} + \cdots + (a_{in} + b_{in})\tilde{c}_{in} \\ =& (a_{i1}\tilde{c}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{c}_{in}) + (b_{i1}\tilde{c}_{i1} + \cdots + b_{in}\tilde{c}_{in}).\end{aligned}$$

違いのある部分を除いた余因子は，$\tilde{c}_{ij} = \tilde{a}_{ij} = \tilde{b}_{ij}$. よって，

$$\begin{aligned}\det C =& (a_{i1}\tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}) + (b_{i1}\tilde{b}_{i1} + \cdots + b_{in}\tilde{b}_{in}) \\ =& \det A + \det B.\end{aligned}$$

## C1 列多重線形性の直観的説明

$$\det\left(\vec{a}_1\ \vec{a}_2+\vec{b}_2\right)=\det\left(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\right)+\det\left(\vec{a}_1\ \vec{b}_2\right)$$




$k=1$

$$\begin{aligned}10&=\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&3&+2\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}2&1\\-1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-1\\-1&+2\end{vmatrix}\\&=7+3\end{aligned}$$

## R2 の証明

$\det C = k \det A$ とかく．

$n = 1$ のとき成立．

$n \geq 2$ のとき，$i$ 行について余因子展開して，

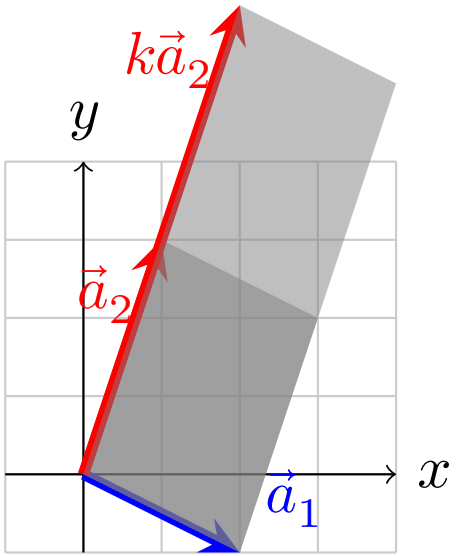
$$\det C = (ka_{i1}\tilde{c}_{i1} + \cdots + ka_{in}\tilde{c}_{in}) = k(a_{i1}\tilde{c}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{c}_{in}).$$

違いのある部分を除いた余因子は，$\tilde{c}_{ij} = \tilde{a}_{ij}$.

$$\det C = k(a_{i1}\tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}) = k \det A.$$

## C2 列多重線形性の直観的説明

$$\det\left(\vec{a}_1 \ k\vec{a}_2\right) = k \det\left(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2\right)$$




$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \cdot k \\ -1 & 3 \cdot k \end{vmatrix}$$

$$= k \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= k \times 7$$

R3': $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{i+1}$

## 定理 (R3': 行列式の行交代性 石村畑 線形代数 定理 3.3.2)

$a_1, \ldots, a_n$: 1 行 $n$ 列の行ベクトル

$$\forall 1 \leq i < n \qquad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i+1} \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

交代=入れ替えると $(-1)$ 倍になる，反対称.

## R3' の証明

$\det A = -\det B$ とかく.

$\det A$ の $i$ 行目の余因子展開，$\det B$ の $i+1$ 行目の余因子展開の違いは符号だけ.

例 $n = 3, i = 2, i+1 = 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{vmatrix} = -21 \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 32 & 33 \end{vmatrix} + 22 \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 33 \end{vmatrix} - 23 \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 31 & 32 \end{vmatrix}.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 31 & 32 & 33 \\ 21 & 22 & 23 \end{vmatrix} = +21 \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 32 & 33 \end{vmatrix} - 22 \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 33 \end{vmatrix} + 23 \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 31 & 32 \end{vmatrix}.$$

R3: $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$

## 系 (R3: 行列式の行交代性 石村畑 線形代数 系 3.3.3)

$a_1, \ldots, a_n$: 1 行 $n$ 列の行ベクトル

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n \qquad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

「系」Corollary とは，定理から簡単に導ける結果のこと

R3 の証明 $(i, j)$ の入替には，必ず $2(j-i)-1$ 回 (奇数回) の $(i, i+1)$ 入替が必要．$(-1)^{2(j-i)-1} = -1$.

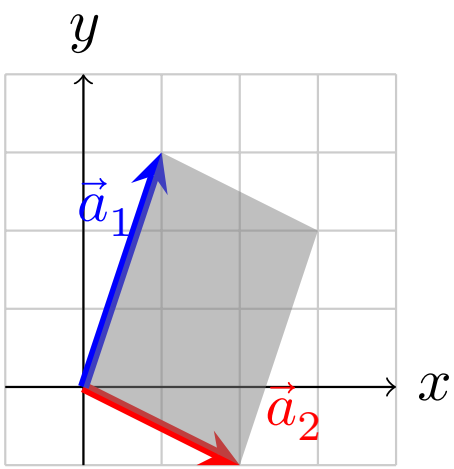
## R3 の例

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{R3}}{=} (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{R3,R3}}{=} (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

## C3 列交代性 $\vec{a}_1 \leftrightarrow \vec{a}_2$ の直観的説明

$$\det\left(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\right) = -\det\left(\vec{a}_2\ \vec{a}_1\right)$$




裏返し

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -7$$

## 系 (R4: 行列式の重複行 石村畑 線形代数 系 3.3.4)

$a_1, \dots, a_n, c$: 1 行 $n$ 列の行ベクトル

$$\forall 1 \le i \ne j \le n \qquad \begin{vmatrix} & a_1 & \\ & \vdots & \\ & c & (i \\ & \vdots & \\ & c & (j \\ & \vdots & \\ & a_n & \end{vmatrix} = 0$$

### R4 の例

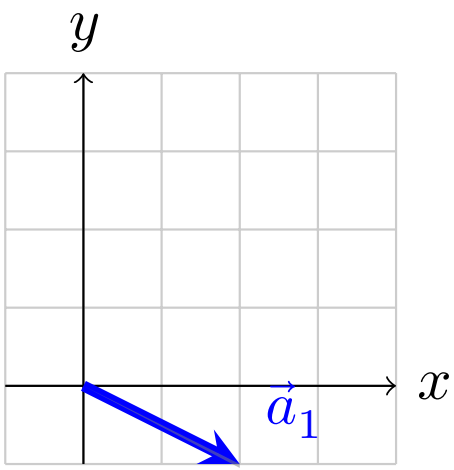
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 95 & 96 & 97 & 98 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 55 & 56 & 57 & 58 \end{vmatrix} \overset{\text{R4}①,③}{=} 0$$

R4 の証明 R3:$\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$ で行列 $C$ は変わらない.

$$\det C = \begin{vmatrix} a_1 & \\ \vdots & \\ c & (i \\ \vdots & \\ c & (j \\ \vdots & \\ a_n & \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} a_1 & \\ \vdots & \\ c & (i \\ \vdots & \\ c & (j \\ \vdots & \\ a_n & \end{vmatrix}.$$

移項すると，$2 \times \det C = 0$.

C4 の直観的説明 $\boxed{\det\left(\vec{a}_1\ \vec{a}_1\right) = 0}$




面積 0

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

R5: $\textcircled{i} + \textcircled{j} \times k$

## 定理 (R5: 行列式の不変性 石村畑 線形代数 定理 3.3.5)

$a_1, \ldots, a_n$: 1 行 $n$ 列の行ベクトル, $k \in \mathbb{R}$.

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n \qquad \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + ka_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

## R5 の証明

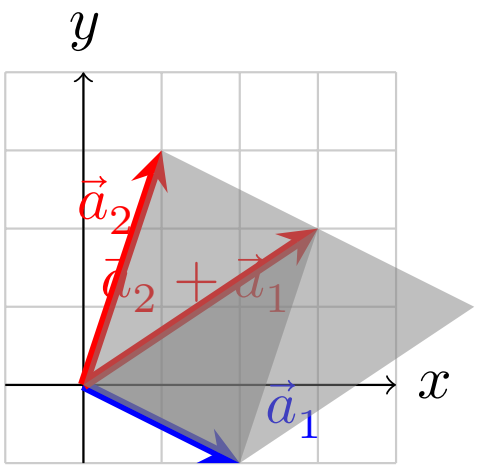
$$\text{右辺} \overset{\text{R1,R2}}{=} \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \overset{\text{R4}}{=} \text{左辺} + k \cdot 0$$

## 例

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{R2:}①\times\frac{1}{2}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{R5:}②+①\times(-7)}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -12 & -9 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot 1 \cdot (-12) \cdot 3 \cdot 5.$$

## C5 の直観的説明 $\det\left(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\right) = \det\left(\vec{a}_1\ k\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)$




$k = 1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1+ & 1\cdot 2 \\ -1 & 3+ & 1\cdot(-1) \end{vmatrix} = 7$$

# 行列式の性質 2

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L18(2025-06-11 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-11 Wed 14:10 JST hig"

今日の目標

- 行列の積，逆行列の行列式を求められる 石村畑 線形代数 §3.3
- 行列の積，逆行列の転置を求められる 石村畑 線形代数 §4.1

# ここまで来たよ

17 行列式の性質 1

18 行列式の性質 2
- 積・逆の行列式
- 転置行列
- 行列式がゼロになるとき
- 変数を含む行列式

# 積の行列式

L18-Q1

## Quiz(線形変換の合成と行列式)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換 $f, g$ が，それぞれ行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される．

1. 合成変換 $f \circ g$ の面積拡大率を求めよう．表向き？ 裏向き？
2. 合成変換 $g \circ f$ の面積拡大率を求めよう．表向き？ 裏向き？

## 定理 (行列の積の行列式 石村畑 線形代数 定理 3.3.6(p.90))

$A, B$: $n$ 次正方行列
$|AB| = |A|\,|B| \qquad = |B|\,|A| = |BA|.$

「行列の積の行列式は，行列式の積」mobius IS3.4
証明 略．（この定義だと）超たいへん．

## 命題

$A, B$ が $n$ 次正方行列, $k \in \mathbb{R}$ のとき，

- $|A + B|$ は一般には簡単化できない．
- $|kA| = k^n |A|$.

# 逆行列の行列式

## Quiz(線形変換の逆変換と行列式)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換 $f$ が，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ で表される．
$f, f^{-1}$ の面積拡大率を求めよう．表向き？ 裏向き？

## 補題 (単位行列の行列式)

$\det(E) = 1.$

Lemma=補題=補助定理とは，美しくはないけど，本題の定理を証明するための準備として証明する必要のある主張のこと．

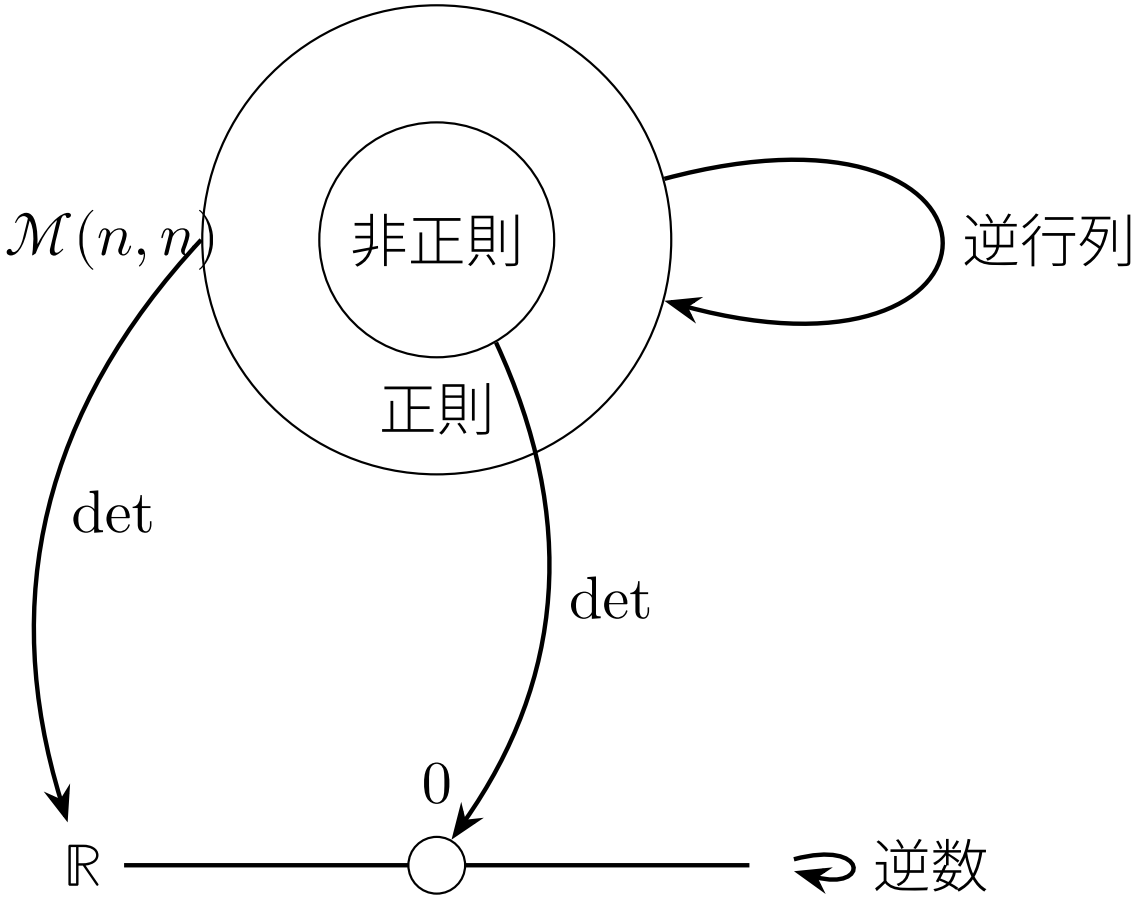
## 定理 (逆行列の行列式 石村畑 線形代数 定理 4.1.4(p.103) の半分 )

$A$ が正則行列ならば，
$\det(A) \neq 0.$
$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

(正則なら) 逆行列の行列式は，行列式の逆数
(対偶：$\det A = 0$ ならば，$A$ は正則でない)

証明

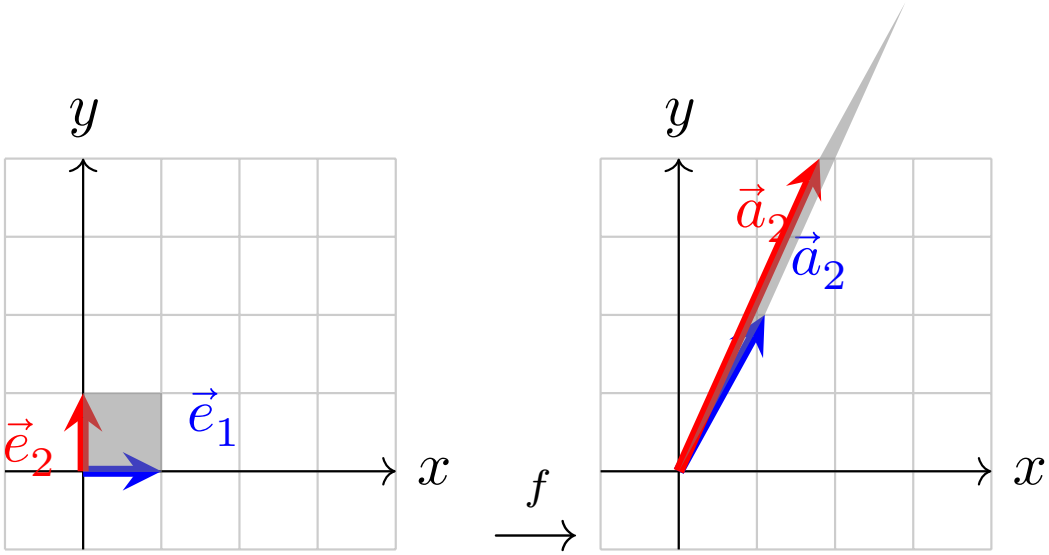
「det は, $n$ 次の正則行列全体の乗法群から, 乗法群 $\mathbb{R}_{\neq 0}$ への全射群準同型写像である」



## $\det(A) = 0$ なら正則でないことの直観的意味

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表される変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\det\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$，面積拡大率=0.




実は，定義域 $X = \mathbb{R}^2$ のすべての点が，$f$ で直線 $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t | t \in \mathbb{R}\}$ に写っている．$f$ は全射でない．よって，$f$ の逆変換は存在しない．例えば，$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $\vec{x}$ は存在しない．

正則で逆行列 $A^{-1}$ があるなら，逆変換 $f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ があるはず．

問「$A$ が正則なら $\det A \neq 0$」の逆「$\det A \neq 0$ なら正則」は成立する？

答 Yes.「行列式で正則判定できる」

次回

L18-Q2

## Quiz(積と逆の行列式)

$A, B$ を正則行列とする．$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

1. $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$ を求めよう．
2. $\det((AB)^{-1})$, $\det((BA)^{-1})$ を求めよう．
3. $\det(A)$, $\det(B)$ を求めよう．
4. $\det(AB)$, $\det(BA)$ を求めよう．
5. $\det(A^n)$ を求めよう．

# ここまで来たよ

17 行列式の性質 1

18 行列式の性質 2
- 積・逆の行列式
- 転置行列
- 行列式がゼロになるとき
- 変数を含む行列式

# 転置行列

## 定義 (転置行列 石村畑 線形代数 §4.1(p.100))

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対して，$n$ 行 $m$ 列の行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を $A$ の転置行列 (transposed matrix) といい，${}^{\mathrm{t}}A$ と書く．

$A$ の $t$ 乗 $A^t (t \in \mathbb{Z})$ と間違えないために，左上に立体で頭文字 t とかく．
$A$ の成分を $a_{ij}$，$B = {}^{\mathrm{t}}A$ の成分を $b_{ij}$ とすると，$a_{ij} = b_{ji}$．

## 例 (転置行列)

縦ベクトルの転置は横ベクトル，横ベクトルの転置は縦ベクトル．

$$ {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{\mathrm{t}}C = {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}, c_{12} = b = d_{21}. $$

# 転置行列の性質

## 定理 (転置行列の性質)

$A, B$ を行列, $k \in \mathbb{R}$ とするとき,

$$
\begin{aligned}
{}^{t}({}^{t}A) &= A, \\
{}^{t}(A+B) &= {}^{t}A + {}^{t}B, \\
{}^{t}(kA) &= k\,{}^{t}A, \quad \text{以上まあ当たり前} \\
|{}^{t}A| &= |A|, \quad \text{石村畑 線形代数 定理 4.1.2(p.100)} \\
{}^{t}(AB) &= {}^{t}B\,{}^{t}A. \quad \text{石村畑 線形代数 定理 4.1.1(p.100) 超重要} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

(*) の証明 $A$ の成分を $a_{ik}$, $B$ の成分を $b_{kj}$, ${}^{t}A$ の成分を $c_{ik}$, ${}^{t}B$ の成分を $d_{kj}$ と書くと, $a_{ik} = c_{ki}, b_{kj} = d_{jk}$.
$AB$ の $(i,j)$ 成分は $\sum_{\ell} a_{i\ell} b_{\ell j}$.
${}^{t}(AB)$ の $(i,j)$ 成分は $\sum_{\ell} a_{j\ell} b_{\ell i} = \sum_{\ell} d_{j\ell} c_{\ell i}$. これは, ${}^{t}B\,{}^{t}A$ の $(i,j)$ 成分. よって, ${}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A$.

## 命題 (逆行列の転置)

$({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$

証明

L18-Q3

## Quiz(行列式の性質を使った計算)

$A, B$ を $n$ 次正則行列，$E$ を $n$ 次単位行列とする．
$\det(A) = p, \det(B) = q, \det(A+E) = r, \det(B+E) = s, \det(A+B) = t$ とする．

1. 次の行列式を を $p, q, r, s, t, n$ で表そう．
   1. $\det(({}^{\mathrm{t}}A)^{-2})$.
   2. $\det(A^5 + A^4)$.
   3. $\det(2E)$.
   4. $\det(3\,{}^{\mathrm{t}}ABA^{-1}B^2)$
2. 行列の式 $A^2(A+B)A^{-2}$ を展開して簡単化しよう．
3. 行列式 $\det(A^2(A+B)A^{-2})$ を $p, q, r, s, t, n$ で表そう（展開しないほうがいいかも）
4. 行列の式 $2B^{-1}(BA+A)B$ を展開して簡単化しよう．
5. 行列式 $\det(2B^{-1}(BA+A)B)$ を $p, q, r, s, t, n$ で表そう（展開しないほうがいいかも）

# ここまで来たよ

17 行列式の性質 1

18 行列式の性質 2
- 積・逆の行列式
- 転置行列
- 行列式がゼロになるとき
- 変数を含む行列式

# 行列式がゼロになるとき 教科書に追加

## すでにわかっていること

### 命題

$A$ を $n$ 次正方行列とする．

R4 $A$ の第 $i$ 行と第 $j$ 行 $(i \neq j)$ が等しいなら，$|A| = 0$

C4 $A$ の第 $i$ 列と第 $j$ 列 $(i \neq j)$ が等しいなら，$|A| = 0$.

- $A$ が上下三角行列で，対角成分に zero のものがあれば，$|A| = 0$.
- 
- $A$ が正則なら，$|A| \neq 0$.
- $|A| = 0$ なら，$A$ は正則でない，すなわち $A^{-1}$ は存在しない．
- 疑問：$A$ が正則でないなら，$|A| = 0$?
- 疑問：$|A| \neq 0$ なら，$A$ は正則?

$|A| = 0$ のとき，行列が表す線形変換の面積拡大率はゼロ，つぶれる．

## 命題

$A$ を $n$ 次正方行列とする.

- $A$ に，すべて $0$ である行があれば $|A| = 0$.
- $A$ の第 $i$ 行が，第 $j$ 行 $(i \neq j)$ の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら，$|A| = 0$
- $A$ の第 $k$ 行が，第 $i$ 行と第 $j$ 行を加えたものなら，$|A| = 0$
- $A$ に，すべて $0$ である列があれば $|A| = 0$.
- $A$ の第 $i$ 列が，第 $j$ 列 $(i \neq j)$ の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら，$|A| = 0$
- $A$ の第 $k$ 列が，第 $i$ 列と第 $j$ 列を加えたものなら，$|A| = 0$

他にも, R2,4,5, C2,4,5 で，$|A| = 0$ とわかるケースがある.

# ここまで来たよ

17 行列式の性質 1

18 行列式の性質 2
- 積・逆の行列式
- 転置行列
- 行列式がゼロになるとき
- 変数を含む行列式

# 変数を含む行列式

石村畑 線形代数 §3.4

L18-Q4

## Quiz(2 次正方行列の特性多項式)

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，$|xE - A| = 0$ を満たす $x$ を求めよう．

このとき, 行列式は $x$ の 2 次多項式.

L18-Q5

## Quiz(3 次正方行列の特性多項式)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$|xE - A| = 0$ を満たす $x$ を求めよう．

# 逆行列の公式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L19(2025-06-13 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-13 Fri 07:22 JST hig"

今日の目標

- 余因子行列から逆行列を求められる 石村畑 線形代数 §4.1
- 正則と $\det A \neq 0$ の同値性を説明できる 石村畑 線形代数 §4.1
- 逆行列を用いて連立 1 次方程式を解ける 石村畑 線形代数 §4.2

L18-Q1

## Quiz 解答: 線形変換の合成と行列式

1. $f \circ g$ は $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ で表される．$|AB| = 12$ より，12 倍，表向き．

別解 最初に施される $g$ は，$|B| = -3$ より，3 倍，裏向きに写す．次に施される $f$ は，$|A| = -4$ より，4 倍，裏向きに写す．これらの合成なので，$3 \cdot 4$ 倍，表向きに写す．

2. $g \circ f$ は $BA = \begin{pmatrix} 17 & 14 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ で表される．$|BA| = 12$ より 12 倍，表向き．

### Quiz(線形変換の逆変換と行列式)

$\mathbb{R}^2$ の線形変換 $f$ が，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ で表される．
$f, f^{-1}$ の面積拡大率を求めよう．表向き？ 裏向き？

L18-Q2

## Quiz 解答: 積と逆の行列式

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \neq (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$.
2. $\det((AB)^{-1}) = \det(B^{-1}A^{-1}) = \det(B^{-1})\det(A^{-1}) = (-5)\cdot(-2) = 10 = \det((BA)^{-1})$.
3. $\det(A) = \det((A^{-1})^{-1}) = (\det(A^{-1}))^{-1} = \frac{1}{-2}$.
   $\det(B) = \det((B^{-1})^{-1}) = (\det(B^{-1}))^{-1} = \frac{1}{-5}$.
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \frac{1}{10} = \det(BA)$.
   または，$\det(AB) = \det(((AB)^{-1})^{-1}) = (\det((AB)^{-1}))^{-1} = \frac{1}{10}$.
5. $n = 2$ 次正方行列なので，
   $\det(3A^k) = 3^n \det(A^k) = 3^2(\det(A))^k = 3^2(-2)^k$.

emark $-1$ は逆行列，$-1$ は実数の逆数，$k$ は行列の $k$ 乗，$k$ は実数の $k$ 乗.

Q3 以降略

# 行列式がゼロになるとき 教科書に追加

すでにわかっていること

## 命題

$A$ を $n$ 次正方行列とする．

R4 $A$ の第 $i$ 行と第 $j$ 行 $(i \neq j)$ が等しいなら，$|A| = 0$

C4 $A$ の第 $i$ 列と第 $j$ 列 $(i \neq j)$ が等しいなら，$|A| = 0$.

- $A$ が上下三角行列で，対角成分に zero のものがあれば，$|A| = 0$.
- 
- $A$ が正則なら，$|A| \neq 0$.
- $|A| = 0$ なら，$A$ は正則でない，すなわち $A^{-1}$ は存在しない．
- 疑問：$A$ が正則でないなら，$|A| = 0$?
- 疑問：$|A| \neq 0$ なら，$A$ は正則?

$|A| = 0$ のとき，行列が表す線形変換の面積拡大率はゼロ，つぶれる．

## 命題

$A$ を $n$ 次正方行列とする.

- $A$ に，すべて $0$ である行があれば $|A| = 0$.
- $A$ の第 $i$ 行が，第 $j$ 行 $(i \neq j)$ の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら，$|A| = 0$
- $A$ に，すべて $0$ である列があれば $|A| = 0$.
- $A$ の第 $i$ 列が，第 $j$ 列 $(i \neq j)$ の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら，$|A| = 0$

そのような行，列は, R5, C5 で作り出せる（作りだそう）.
他にも, R2,4,5, C2,4,5 で，$|A| = 0$ とわかるケースがある.
mobius IH3.3

# ここまで来たよ

18 行列式の性質 2

19 逆行列の公式
- 逆行列の公式
- 連立 1 次方程式と逆行列

# 余因子行列

復習 線形代数☆演習 I(2025)L16

## 定義 (小行列式と余因子 石村畑 線形代数 p.60)

$A$: $n$ 次の正方行列 のとき,
$A$ の $(i,j)$ 小行列式 (minor) $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, $A$ から第 $i$ 行, 第 $j$ 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.
$A$ の $(i,j)$ 余因子 (adjugate) $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

## 定義 (余因子行列 石村畑 線形代数 p.101)

$A$ を $n$ 次正方行列, $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$, 余因子を $\tilde{a}_{ij}$ とする.
$A$ の余因子行列 $\tilde{A}$ を, $(i,j)$ 成分が $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ であるような $n$ 次正方行列と定義する.

余因子を素直に行列状に並べて，その後で転置したもの.

例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}.$$

mobius IH4.1

## 補題 (余因子展開 (行列形) 石村畑 線形代数 補助定理 4.1.3)

$A$ を $n$ 次の正方行列，$\tilde{A}$ を $A$ の余因子行列とするとき，

$$|A|E = A\tilde{A} = \tilde{A}A$$

証明 次のスライドから．

## 定理 (行列の正則条件と逆行列公式 石村畑 線形代数 定理 4.1.4)

$A$ を $n$ 次正方行列，$\tilde{A}$ を余因子行列とする．

1. $A$ が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$.
2. $A$ が正則のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

すでに，「$A$ が正則 $\Rightarrow |A| \neq 0$」は示していた．
逆に，$|A| \neq 0 \Rightarrow A$ が正則」，なぜなら，$\frac{1}{|A|}\tilde{A}$ が現に逆行列になっている．
計算量が多いので数値問題での使用を避ける．もっと実用的な方法あり．

補題を，成分で書き直したのがこれ．

## 命題 (余因子展開 (成分))

$A$ を $n$ 次の正方行列，$a_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ 成分，$\tilde{a}_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ 余因子とするとき，

- $\forall i,k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j,k \quad \det(A)\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{k\ell}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明

$i = k$ のとき $\delta_{ik} = 1$ ． ふつうの余因子展開であり成立.

$i \neq k$ のとき

$A$ で, $k$ 行目に, $i$ 行目を上書きコピーした行列を $B$ とする.

実は 左辺 $= 0 = \det(B)$=右辺.

左辺=0 $= \det(B)$

$i \neq k$ と交代性より $\det(B) =$ 左辺.

$\det(B) =$ 右辺

$\det(B)$ の $k$ 行目に関する余因子展開は $\det(B) = \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell}\tilde{b}_{k\ell}$.

コピーの結果 $b_{k\ell} = a_{i\ell}$,

余因子 $\tilde{b}_{k\ell}$ は，$i \neq k$ より，コピーされた部分をはずしてるので,

$\tilde{b}_{k\ell} = \tilde{a}_{k\ell}$.

よって $\det(B)$ の余因子展開は右辺と一致する.

よって，$i \neq k$ のときは

$$\det(A)\delta_{ik} = \det(B) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$

$$0 = \det(B) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}.$$

$i \neq k$ の場合の証明の実演

$A$ の $i = 4$ 行を $k = 2$ 行にコピーして $B$ を作成.

$B$ を $k = 2$ 行で展開.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 = \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \\ &= 41\tilde{a}_{21} + 42\tilde{a}_{22} + 43\tilde{a}_{23} + 44\tilde{a}_{24} \\ &= a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + a_{i3}\tilde{a}_{k3} + a_{i4}\tilde{a}_{k4}. \end{aligned}$$

# 逆行列公式をあえて使ってみた例

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} =$$

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}, B^{-1} =$$

# ここまで来たよ

18 行列式の性質 2

19 逆行列の公式
- 逆行列の公式
- 連立 1 次方程式と逆行列

# 連立 1 次方程式の行列による表現

石村畑 線形代数 p.106,p,134

## 行列の意味

$m$ 行 $n$ 列の行列 $\leftrightarrow$ 線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\leftrightarrow$ $n$ 元 $m$ 連立 1 次方程式

連立 1 次方程式で,

- 変数（未知数）が $n$ 個（「$n$ 元」）$x_1, \ldots, x_n$
- 等式が $m$ 個（「$m$ 連立」）

のものを考える.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ &\cdots+a_{1n}x_n &&= b_1 \\ &\vdots && \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ &\cdots+a_{mn}x_n &&= b_m \end{aligned}$$

これを，次の形に書く．

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\text{係数行列} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{未知数ベクトル} X = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{定数ベクトル} B = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

（石村畑 線形代数 §4 では，$\vec{x}, \vec{b}$ を $m$ 行 1 列の行列とみなして，$X$,$B$ と書いている．ここでは縦（列）ベクトルとみなす．ベクトルは行列の一種だから別にいいでしょ．mobius　では縦ベクトルとして入力して．）

$A$ と $\vec{b}$ を連結した行列 $B = (A|\vec{b})$ を拡大係数行列という． 石村畑 線形代数 p.134

L19-Q1

## Quiz(連立 1 次方程式の行列による表示)

未知数 $x_1, \ldots, x_5$ についての次の連立 1 次方程式を, 係数行列, 未知数ベクトル, 定数ベクトルで書かれた，同値な，行列の 1 つの等式に書き直そう．拡大係数行列を求めよう．

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 20, \\ x_2 + 7x_3 + 2x_5 = 40, \\ -2x_1 + 3x_2 = 60. \end{cases}$$

mobius IH4.1

# 逆行列と連立 1 次方程式 石村畑 線形代数 §4.2

## 命題 (逆行列を利用した連立 1 次方程式の解)

未知数の個数 $n$ と，等式の個数 $m$ が一致した $n$ 元連立 1 次方程式を

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の形に書くと，$A$ は $n$ 次正方行列になる．
$A$ が正則行列であるとき，$n$ 元連立 1 次方程式の解は次で与えられる．

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

証明 正則なので $A^{-1}$ が存在する．方程式の左から $A^{-1}$ をかける．

係数行列が正則のとき，解は唯一 (unique に) 存在する．解なしや不定はない．

L19-Q2

## Quiz(逆行列と連立 1 次方程式)

正則行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ で書かれた次の連立 1 次方程式を解こう．ただし，

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ であることを確かめた上で使ってよい．

1. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

mobius IH4.1

# 掃き出し法（正則行列）

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L20(2025-06-18 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-18 Wed 07:12 JST hig"

今日の目標

- 行基本操作と行基本変形を説明できる 石村畑 線形代数 p.114
- 行基本変形で単純な連立 1 次方程式を解ける
  石村畑 線形代数 p.112
- 行列式の計算と行基本変形との区別を説明できる
  石村畑 線形代数 p.114

## L19-Q1

### Quiz 解答: 連立 1 次方程式の行列による表示

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

この係数行列は正方行列でなく，したがって正則でない．
拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 40 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

## L19-Q2

### Quiz 解答: 逆行列と連立 1 次方程式

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}a+b-c \\ \frac{2}{3}a-b+c \\ -\frac{2}{3}a+b \end{pmatrix}$.

# ここまで来たよ

19 逆行列の公式

20 掃き出し法（正則行列）
- 行基本操作・行基本変形
- 行基本変形による連立 1 次方程式の解法（正則）

# 復習：連立 1 次方程式を行列で書く 石村畑 線形代数 p.106

変数 $x_1, \dots, x_n$.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdots + a_{1n}x_n \quad &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \cdots + a_{mn}x_n \quad &= b_m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\text{係数行列} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{未知数ベクトル} \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{定数ベクトル} \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$\text{拡大係数行列} \left( A | \vec{b} \right).$$

# 連立 1 次方程式の解法

- 「系統的な」解法 (=拡大係数行列を入力, 解を出力とするアルゴリズム) そのもの自身を研究したい
  - その解法は必ず解を出力するのか?
  - 何ステップかかるのか?
- ここでは加減法のみを調べることにして, 代入法は考えない
- 最初に与えられたのと同じ個数 ($m$ 個) の等式をキープして, 同値変形だけを行っていく
- 特定の許された操作のみを行う.

# 行基本操作と行基本変形 石村畑 線形代数 §4.3

連立 1 次方程式の，拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ を考える．
行列に次の操作をしても，連立 1 次方程式は同値（解が変わらない）．

## 定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations) 石村畑 線形代数 p.114)

$\textcircled{i}, \textcircled{j}$ は拡大係数行列の行番号．①, ②, ...

RI $\textcircled{i} \times$ (定数$k$), $(k \neq 0)$
RII $\textcircled{i} + \textcircled{j} \times$ (定数$k$), $(i \neq j)$
RIII $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$, $(i \neq j)$

mobius IH4.3
RI は行列式の計算 石村畑 線形代数 p.80 での R2 に，RII は R5 に，RIII は R3 に似ているが同じではない．
行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

# 行基本操作の可逆性

変形前後の連立 1 次方程式が同値であることは，行基本操作は, 別の行基本操作 (逆操作) で元に戻せることから言える.

RI) $\textcircled{i} \times$ (定数$k$), $(k \neq 0)$ の逆操作は…
RII $\textcircled{i} + \textcircled{j} \times$ (定数$k$), $(i \neq j)$ の逆操作は…
RIII $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$, $(i \neq j)$ の逆操作は…

基本操作の $\to$ は，集合の等号
$(A_1|\vec{b}_1) \overset{\text{R*}}{\to} (A_2|\vec{b}_2)$ ならば,
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A_1\vec{x} = \vec{b}_1\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A_2\vec{x} = \vec{b}_2\} \subset R^n$.
行列式の計算の $=$ は，実数の等号
$|A_1| \overset{\text{R*}}{=} |A_2| \in \mathbb{R}$

# ここまで来たよ

19 逆行列の公式

20 掃き出し法（正則行列）
- 行基本操作・行基本変形
- 行基本変形による連立 1 次方程式の解法（正則）

L20-Q1

## Quiz(連立 1 次方程式)

1. 連立 1 次方程式 $\begin{matrix}2x_1+4x_2 &=16,\\ 4x_1+5x_2 &=23,\end{matrix}$ を，係数行列 $A$, 未知数ベクトル $\vec{x}$, 定数ベクトル $\vec{b}$ で書き直そう．
2. 上の連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ を，$\left(\begin{smallmatrix}1&0&\alpha\\0&1&\beta\end{smallmatrix}\right)$ の形に 行基本変形しよう．1 回の基本操作では RI, RII, RIII のいずれかを 1 個だけ使い ( $\overset{③+①\times(-3)}{\longrightarrow}$ のような 記号を記すこと), 横方向に $(::) \overset{①\leftrightarrow②}{\longrightarrow} (::) \overset{①\leftrightarrow②}{\longrightarrow} (::) \overset{①\leftrightarrow②}{\longrightarrow} \dots$ のように矢印でつないで記述する．
3. $\begin{matrix}x_1=\alpha,\\ x_2=\beta\end{matrix}$ が上の連立 1 次方程式を満たすことを確かめよう．
4. 係数行列の行列式 $\det A$ を，R1–R5 を使って $k\times\left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right|$ の形に持って行って値 $k$ を求めよう．1 回に R1–R5 のいずれかを 1 個だけ使い ( $\overset{③+①\times(-3)}{=}$ のような 記号を記すこと), 横方向に $|::| \overset{①\leftrightarrow②}{=} |::| \overset{①\leftrightarrow②}{=} |::| \overset{①\leftrightarrow②}{=} \dots$ のように等号で結んで計算する．

石村畑 線形代数 p.112 | 石村畑 線形代数 問題 29

# 掃き出し法 (2 次正則行列)

掃き出し法≃ Gauss の消去法 (Gaussian elimination) 2 次正則行列を必ず単位行列に基本変形できる手順

## 掃き出し法 (2 次正則行列)

1. $(1,1)$ 成分を，そのまま，または RIII で，ゼロ以外の状態にする（必要なら）
2. $(1,1)$ 成分を，RI で 1 にする
3. $(i,1)$ 成分 $(i \neq 1)$ を，RII ですべてゼロにする（っていっても $(2,1)$ 成分しかないけど）
4. $(2,2)$ 成分を，そのまま，または RIII で，ゼロ以外の状態にする（実は最初からゼロ以外であるはず）
5. $(2,2)$ 成分を，RI で 1 にする
6. $(i,2)$ 成分 $(i \neq 2)$ を，RII ですべてゼロにする（っていっても $(1,2)$ 成分しかないけど）

単位行列にならないとき，$m \times n$ のときも，これを拡張した手順を使う

L20-Q2

## Quiz(連立 1 次方程式)

1. 連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 13, \\ x_1 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 &= 17 \end{aligned}$$

を，係数行列 $A$, 未知数ベクトル $\vec{x}$, 定数ベクトル $\vec{b}$ で書き直そう．

2. 上の連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ を，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ の形に 行基本変形しよう．1 回の基本操作では RI, RII, RIII のいずれかを 1 個だけ使い ( $\overset{③+①\times(-3)}{\longrightarrow}$ のような 記号を記すこと), 横方向に $(::) \overset{①\leftrightarrow②}{\longrightarrow} (::) \overset{①\leftrightarrow②}{\longrightarrow} (::) \overset{①\leftrightarrow②}{\longrightarrow} \ldots$ のように矢印でつないで記述する．

3. $\begin{matrix} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta, \\ x_3 = \gamma \end{matrix}$ が上の連立 1 次方程式を満たすことを確かめよう．

4. 係数行列の行列式 $\det A$ を，R1–R5 を使って $k \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ の形に持っ

# （簡約）階段行列・階数・同次連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L21(2025-06-20 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-20 Fri 11:11 JST hig"

## 今日の目標

- 簡約/階段行列, 階数の定義を説明できる 石村畑 線形代数 §4.4
- 掃き出し法で簡約階段化できる 石村畑 線形代数 §4.4
- 同次連立 1 次方程式の解を求められる 石村畑 線形代数 §4.5

L20-Q1

## Quiz 解答: 連立 1 次方程式

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \end{pmatrix}$.
2. $(A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 4 & 5 & 23 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{matrix} x_1 = 2, \\ x_2 = 3. \end{matrix}$ を上の 1 次方程式に代入すると成立することから，解である ことが確かめられる.
4. $\det A = \left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right| = \cdots = -6 \left|\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = -6$.

### より詳細な基本変形

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 4 & 5 & 23 \end{pmatrix} \overset{①\times\frac{1}{2}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 23 \end{pmatrix} \overset{②+①\times(-4)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \overset{②\times(-\frac{1}{3})}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{①+②\times(-2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

### より詳細な行列式の計算

$$\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right| \overset{①\times\frac{1}{2}}{=} 2\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right| \overset{②+①\times(-4)}{=} 2\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right| \overset{②\times(-\frac{1}{3})}{=} 2\cdot(-3)\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right| = -6.$$

L20-Q2

# Quiz 解答: 連立 1 次方程式

1. 略. $A\vec{x} = \vec{b}$ の形に書く．問の指定で言う「等式」とは，$=$ のはいった式のこと．問の式で言う「書き直す」とは，別の同値な形で書くこと．
2. $$(A|\vec{b}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
3. $\begin{matrix} x_1 = 7, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 5. \end{matrix}$ を上の連立 1 次方程式に代入すると成立することから，解であることが確かめられる．
4. $\det A = \cdots = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

## より詳細な基本変形

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & 0 & 17 \end{pmatrix} \overset{③+①\times(-2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{③+①\times(-2)}{\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{pmatrix} \overset{③\times(-\frac{1}{2})}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \overset{②+③\times(-2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

## より詳細な行列式の計算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{①\leftrightarrow②}{=} -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{③+①\times(-2)}{=} -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{③+②\times(-1)}{=}$$

$$-1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{上三角}}{=} (-1) \times (-2) = 2.$$

# ここまで来たよ

18 掃き出し法

19 （簡約）階段行列・階数・同次連立 1 次方程式
- 階段行列・簡約階段行列・階数
- 同次連立 1 次方程式の解

# (行) 階段形 (ref=row echelon form)

## 定義 (階段行列 (echelon matrix))

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A$ が階段行列であるとは，行番号が増すとともに左から連続して並ぶ 0 の個数が増えるような行列のこと． 石村畑 線形代数 p.122

左端見ていって，最初の非零成分が現れるまでの，0 の個数を数える．

階段形の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$aE, O$

階段形でない例

3 のところが縦 2 段になってるのがだめ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

mobius IH4.4

## 定義 (階段行列のいろいろな量)

$m$ 行 $n$ 列の階段行列 $A$ に対して，

- 階数 (rank) $r = \mathrm{rank} A$「段の個数」ただし $0 \leq r \leq m$.
- 主成分 (ピボット (pivot)) $a_{ic_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$「階段の角」

mobius IH4.4

階段行列の例 ,$aE, O$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 簡約階段形 (rref=reduced row echelon form)

## 定義 (簡約階段行列 教科書に追加)

$m \times n$ 行列 $A$ が簡約階段行列, 簡約階段形の行列である
$\Leftrightarrow$

E1 $A$ が階段行列
E2 主成分がすべて $1$
E3 主成分の真上の成分がすべて $0$

## 簡約階段行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E, O$

mobius IH4.4

## 階段形だが簡約階段形でない例

$aE(a \neq 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 行基本変形定理

## 定理 (行基本変形定理)

任意の行列 $A$ は, 適当な行基本変形によって, 簡約階段行列に変形できる. その簡約階段行列 ($A$ の簡約階段化) はただ一つに定まる.

驚いて疑ってほしい定理

一意性の証明 省略

存在の証明 入力:$A$, 出力:$A$ の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き) を与えることによる.

このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要. 説明延期.

# 一般の行列の階数 (rank)

## 定義 (行列の階数 石村畑 線形代数 p123)

行列 $A$ の簡約階段化の階数を，$A$ の階数 (rank) といい $\mathrm{rank}A$ と書く．

# 掃き出し法の概要

段に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, RIII によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分 $c$ を RI $①\times(1/c)$ で 1 にする
(4) RII $ⓘ+①\times(-a)$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の $a$ を零にする
(5) RII $ⓘ+①\times(-a)$ で, ブロックのその列の上側を零にする
* これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(5) を「再帰的に」行う
* 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

# 掃き出し法 (簡略版)

## 掃き出し法の概要 (簡略版)

行 $\textcircled{i}$ にあるピボットを右下に 1 行ずつ移動しながら，

1. なるべく近い，ゼロばかりでない列を相手にする
2. RIII 必要なら $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$ でゼロでない成分を行 $\textcircled{i}$ に持ってくる (ピボットにする)
3. RI 必要なら $\textcircled{i} \times \frac{1}{c}$ でピボットを 1 にする
4. RII $\textcircled{k} + \textcircled{i} \times (-a)$ でピボットの下ぜんぶをゼロにする
5. RII $\textcircled{k} + \textcircled{i} \times (-a)$ でピボットの上ぜんぶをゼロにする

# Web アプリで

https://learn.hig3.net > 行基本変形計算機

https://bit.ly/redmatrix



https://learn.hig3.net > 動画 簡約階段化

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 10 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

石村畑 線形代数 問題 32

L21-Q1

## Quiz(簡約階段形)

次の行列を, 教科書の掃き出し法のアルゴリズムに従って, 簡約階段形に変形しよう. 1 つの矢印の上に, 1 つの基本操作を明示しよう. $\overset{②\leftrightarrow③}{\longrightarrow}$ のように.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# ここまで来たよ

18 掃き出し法

19 （簡約）階段行列・階数・同次連立 1 次方程式
- 階段行列・簡約階段行列・階数
- 同次連立 1 次方程式の解

## 定義 (同次連立 1 次方程式)

定数項 $\vec{b}$ が $\vec{0}$ である連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

を同次 (homogeneous) 連立 1 次方程式という．

同次を斉次（せいじ，さいじ）ともいう．

## 命題 (同次連立 1 次方程式の拡大係数行列の簡約階段形)

同次連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約階段化すると，

$$(A|\vec{0}) \to \cdots \to (B|\vec{0})$$

となる．

例 同次連立 1 次方程式の拡大係数行列の簡約階段化が次のように得られたとする.

$$\tilde{B} = [B|\vec{b}'] = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は,

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} 0x_1 + & x_2 + & & 2x_4 + & & 4x_6 = & 0 \\ & & x_3 + & 3x_4 + & & 5x_6 = & 0 \\ & & & & x_5 + & 6x_6 = & 0 \\ & & & & & 0 = & 0 \end{array}$$

主成分 (ピボット) に対応する $x_2, x_3, x_5$ は，左辺の 1 個所にしか現れない（しかも係数 1 で）から，これらについて解くのは簡単.

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 - 2x_4 - 4x_6 \\ x_3 &= 0 - 3x_4 - 5x_6 \\ x_5 &= 0 \qquad\quad - 6x_6 \end{aligned}$$

(他にも書くべきことあり)

主成分（ピボット）に対応しない $x_1, x_4, x_6$ は任意だが，求めるべき量なので，右辺に現れるのを放っておくわけにはいかない．同等に扱うため，任意の実数 $s, t, u$ を使って，$x_1 = s$, $s \in \mathbb{R}$ 任意，のように書く.

## 解の答え方 1

$$
\begin{aligned}
x_1 &= s \\
x_2 &= 0 - 2t - 4u \\
x_3 &= 0 - 3t - 5u \\
x_4 &= t \\
x_5 &= 0 - 6u \\
x_6 &= u
\end{aligned}
\quad (s, t, u \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})
$$

## 解の答え方 2 ベクトルの形でも書ける.

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (s, t, u \in \mathbb{R})
$$

# 同次連立 1 次方程式の解き方

## 簡約階段形の拡大係数行列を持つ同次連立 1 次方程式の解き方

1. ピボットのない列 $(\vec{0}, *$ になっている列$)$ にかかる未知数を，任意定数 (パラメタ) $s, t, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく．任意定数の個数を解の自由度 (degree of freedom) という．
2. ピボットに対応する未知数は，これらの任意定数の 1 次式で書ける（その行の式を解いて）．

例　石村畑 線形代数 問題 33,34　mobius　lH4.5

`https://learn.hig3.net` > 動画 連立 1 次方程式

L21-Q2

## Quiz(拡大係数行列から連立 1 次方程式の解)

変数 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$ に関する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の拡大係数行列 $(A|\vec{0})$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ，次のようになった．

$$\tilde{A} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (A'|\vec{0})$$

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ と同値な連立 1 次方程式 $A'\vec{x} = \vec{0}$ を，行列を使わずに書こう．
2. 任意定数 $s, t, u, \cdots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \quad \vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう．
3. 任意定数 $s, t, u, \cdots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\vec{x} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 s + \vec{v}_2 t + \ldots$ の形に書こう．

# 同次連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L22(2025-06-25 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-06-26 Thu 17:20 JST hig"

今日の目標

- 同次連立 1 次方程式の解を求められる 石村畑 線形代数 §4.5
- 階数と自由度の関係を説明できる 石村畑 線形代数 定理 4.5.1
- 同次連立 1 次方程式の解空間を求められる

L21-Q1

## Quiz 解答: 簡約階段形

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{①\leftrightarrow③}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{②+①\times(-3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{②\times\frac{1}{7}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

階数 $r = 2$. ピボットの位置 $c_1 = 2, c_2 = 3$.

# ここまで来たよ

21 （簡約）階段行列・階数

22 同次連立 1 次方程式
- 同次連立 1 次方程式の解
- 同次連立 1 次方程式の解の性質

## 定義 (同次連立 1 次方程式)

定数項 $\vec{b}$ が $\vec{0}$ である連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

を同次 (homogeneous) 連立 1 次方程式という.

同次を斉次（せいじ，さいじ）ともいう.

## 命題 (同次連立 1 次方程式の拡大係数行列の簡約階段形)

同次連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約階段化すると，

$$(A|\vec{0}) \to \cdots \to (A'|\vec{0})$$

となる.

$\vec{b}$ は $\vec{0}$ のまま変化しないので，（拡大 $(A|\vec{b})$ でなく）係数行列 $A$ 部分だけを基本変形することもある.

例 同次連立 1 次方程式の拡大係数行列の簡約階段化 $(A'|\vec{0})$ が次のように得られたとする.

$$(A|\vec{0}) \to (A'|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.
$\operatorname{rank} A = 3$. 階数とは,「実質的な」方程式の個数.

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は,

$$\begin{aligned} 0x_1 + \quad x_2 + \quad 2x_4 + \quad 4x_6 &= 0 \\ x_3 + \quad 3x_4 + \quad 5x_6 &= 0 \\ x_5 + \quad 6x_6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

主成分 (ピボット) に対応する $x_2, x_3, x_5$ は，左辺の 1 個所にしか現れない（しかも係数 1 で）から，これらについて解くのは簡単.

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 - 2x_4 - 4x_6 \\ x_3 &= 0 - 3x_4 - 5x_6 \\ x_5 &= 0 \qquad\quad - 6x_6 \end{aligned}$$

(他にも書くべきことあり)

主成分（ピボット）に対応しない $x_1, x_4, x_6$ は任意だが，求めるべき量なので，右辺に現れるのを放っておくわけにはいかない．同等に扱うため，任意の実数 $s, t, u$ を使って，$x_1 = s$ ($s \in \mathbb{R}$ 任意)，のように書く.

他の変数を任意定数におくのも違法ではない．そうすると，見た目の異なる解が書けるが，後で見るように，任意定数の個数は変わらない.

## 解の答え方 1

$$
\begin{aligned}
x_1 &= s \\
x_2 &= 0 - 2t - 4u \\
x_3 &= 0 - 3t - 5u \\
x_4 &= t \\
x_5 &= 0 - 6u \\
x_6 &= u
\end{aligned}
\quad (s, t, u \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})
$$

## 解の答え方 2 ベクトルの形でも書ける.

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (s, t, u \in \mathbb{R})
$$

# 同次連立 1 次方程式の解き方

## 簡約階段形の拡大係数行列を持つ同次連立 1 次方程式の解き方

1. ピボットのない列 (左の $\vec{0}$ や，ピボットとピボットの間の列，再右ピボットのもっと右の列) がかかる未知数を, 任意定数 (パラメタ) $s, t, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく.
2. ピボットに対応する未知数は, これらの任意定数の 1 次式で書ける（その行の式を解いて）.

任意定数の個数は何個？

例 石村畑 線形代数 問題 33,34 mobius IH4.5

`https://learn.hig3.net` > 動画 連立 1 次方程式

L22-Q1

## Quiz(拡大係数行列から連立 1 次方程式の解)

変数 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$ に関する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の拡大係数行列 $(A|\vec{0})$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ，次のようになった．

$$(A|\vec{0}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (A'|\vec{0})$$

1. 連立 1 次方程式 $A'\vec{x} = \vec{0}$ を，行列を使わずに書こう．
2. 任意定数 $s, t, u, \cdots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう．
3. 任意定数 $s, t, u, \cdots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\vec{x} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 s + \vec{v}_2 t + \ldots$ の形に書こう．

# ここまで来たよ

21 （簡約）階段行列・階数

22 同次連立 1 次方程式
- 同次連立 1 次方程式の解
- 同次連立 1 次方程式の解の性質

# 同次連立 1 次方程式の解の性質

## 命題

同次連立 1 次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\vec{x} = \vec{0}$ を持つ

証明：代入すると $A\vec{0} = \vec{0}$ となり成立する

## 定義 (非自明な解)

同次方程式の $\vec{x} = \vec{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

英単語自明 (trivial) はいろんな文脈でも登場.「わかりきった」?
英単語非自明 (non-trivial) はいろんな文脈でも登場.「おもしろい」「おどろくべき」?

## 定理 (同次連立 1 次方程式の解 石村畑 線形代数 定理 4.5.1)

$m \times n$ 行列 $A$, $n$ 変数の同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ (**) を考える.
整数 $n - \operatorname{rank} A$ を, (**) の解の自由度という.

1. $n - \operatorname{rank} A > 0 \Rightarrow$ (**) の解は一意でない（自明な解に加えて，非自明な解を持つ）解は，自由度と同じ個数の任意定数を含む.
2. $n - \operatorname{rank} A = 0 \Rightarrow$ (**) の解は一意（自明な解 $\vec{x} = \vec{0}$ のみ）.

mobius IH4.5

$n - \operatorname{rank} A =$ 自由度

未知数の個数 − 実質的な方程式の個数 = 任意定数の個数

## 定義 (同次連立 1 次方程式の解空間 教科書に追加)

**同次**連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解全体の集合

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

を，その同次連立 1 次方程式の解空間という.

同次連立 1 次方程式には常に自明な解がある $\Leftrightarrow$ 同次連立 1 次方程式の解空間は原点を含む.
連立 1 次方程式の解空間を求めるとは，
図形の方程式をパラメタ表示に変換することに相当

L22-Q2

## Quiz(同次連立 1 次方程式の解全体の集合)

空間の点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を考える．
次の $A$ に対して，$\operatorname{rank} A$, 方程式の解の自由度を求めよう．解空間
$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{x} = \vec{0}\}$ を求めよう

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

石村畑 線形代数 §1.4

L22-Q3

## Quiz(同次連立 1 次方程式の解全体の集合)

空間の点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を考える．
次の $A$ に対して，$\operatorname{rank} A$, 方程式の解の自由度を求めよう．解空間 $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{x} = \vec{0}\}$ を求めよう

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

石村畑 線形代数 §1.4 | 線形代数☆演習 I(2025)L06 パラメタ表示

L22-Q4

## Quiz(同次連立 1 次方程式の解全体の集合)

$xy$ 平面の点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を考える．
次の $A$ に対して，$\operatorname{rank} A$, 方程式の解の自由度を求めよう．解空間 $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | A\vec{x} = \vec{0}\}$ を求め，平面上に描こう．

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

石村畑 線形代数 §1.3

# 同次連立 1 次方程式の解空間の分類

$n - \operatorname{rank} A =$ 解の自由度=解空間の「次元」

「次元」の正確な定義は 線形代数☆演習 II(2025)L??

次元定理 ( 線形代数☆演習 II(2025)L?? )

準同型定理 (代数入門)

| 未知数の個数 $n$<br>未知数の空間 $\mathbb{R}^n$ の「次元」 | 階数 $r = \operatorname{rank} A$<br>方程式の実質的個数 | 解の自由度=任意定数の個数<br>$A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間の次元 |
|---|---|---|
| 2(平面)<br>2(平面)<br>2(平面) | 2<br>1<br>0 | 0(1 点 $\vec{0}$)<br>1(直線)<br>2(平面全体) |
| 3(空間)<br>3(平面)<br>3(平面)<br>3(平面) | 3<br>2<br>1<br>0 | 0(1 点 $\vec{0}$)<br>1(直線)<br>2(平面)<br>3(空間全体) |
| ⋮ | | |

実は，階数 $r$ にも空間の「次元」次元としての意味がつく．待て次回.

# 同次連立 1 次方程式と線形写像・非同次連立 1 次方程式の解

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L23(2025-06-27 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-02 Wed 07:21 JST hig"

今日の目標

- 線形写像の逆像，像を求められる
- 非同次連立 1 次方程式の解を求められる 石村畑 線形代数 §4.6

L22-Q1

## Quiz 解答: 拡大係数行列から連立 1 次方程式の解

1. $$\begin{aligned} x_2 \quad +2x_3 \qquad \quad +3x_5 \quad +5x_6 \quad &= 0, \\ x_4 \quad +4x_5 \quad +6x_6 \quad &= 0, \\ 0 \quad &= 0, \\ 0 \quad &= 0. \end{aligned}$$

2. $s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を任意定数として，

$$\begin{aligned} x_1 &= s, \\ x_2 &= 0 - 2t - 3u - 5v, \\ x_3 &= t, \\ x_4 &= 0 - 4u - 6v, \\ x_5 &= u, \\ x_6 &= v. \end{aligned}$$

3. $s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を任意定数として，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

L22-Q2

## Quiz 解答: 同次連立 1 次方程式の解全体の集合

簡約階段形は $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

階数 1. 自由度 $3 - 1 = 2$.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3s - 2t, \\ x_2 &= s, \\ x_3 &= t \quad (s, t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t | s, t \in \mathbb{R} \right\}$. 空間内の，$\vec{0}$ を通り，接ベクトル $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の平面.

L22-Q3

## Quiz 解答: 同次連立 1 次方程式の解全体の集合

簡約階段形は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

階数 2. 自由度 $3 - 2 = 1$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4s, \\
x_2 &= -2s, \\
x_3 &= s \quad (s \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} s | s \in \mathbb{R} \right\}$. 空間内の，$\vec{0}$ を通り，接線ベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線.

L22-Q4

## TA Prob and Sol: 同次連立 1 次方程式の解全体の集合

$xy$ 平面の点 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対する同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を考える．
次の $A$ に対して，$\operatorname{rank} A$, 方程式の解の自由度を求めよう．解空間 $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | A\vec{x} = \vec{0}\}$ を求め，平面上に描こう．

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

略解

$V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ で考える．

1. 簡約階段形は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 階数 1, 解の自由度 1. 解空間は $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} s | s \in \mathbb{R} \right\}$. 原点を通り，接線ベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線．
2. 簡約階段形は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 階数 2, 解の自由度 0. 解空間は原点 $\{\vec{0}\}$.

- このケースは，$\det A \neq 0$ なので，逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ を $\vec{0}$ にかけることによっても求められた．

3. 簡約階段形は $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$．階数 0, 解の自由度 2．解空間は空間 $\mathbb{R}^2$ 全体．

# 同次連立 1 次方程式の解空間の分類

$n - \operatorname{rank} A =$ 解の自由度=解空間の「次元」

「次元」の正確な定義は 線形代数☆演習 II(2025)L??

次元定理 ( 線形代数☆演習 II(2025)L?? )

準同型定理 (代数入門)

| 未知数の個数 $n$<br>未知数の空間 $\mathbb{R}^n$ の「次元」 | 階数 $r = \operatorname{rank} A$<br>方程式の実質的個数 | 解の自由度=任意定数の個数<br>$A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間の「次元」 |
|---|---|---|
| 2(平面) | 2 | 0(1 点 $\{\vec{0}\}$) |
| 2(平面) | 1 | 1(直線) |
| 2(平面) | 0 | 2(平面全体) |
| 3(空間) | 3 | 0(1 点 $\{\vec{0}\}$) |
| 3(平面) | 2 | 1(直線) |
| 3(平面) | 1 | 2(平面) |
| 3(平面) | 0 | 3(空間全体) |
| ⋮ | | |

実は，階数 $r$ にも空間の「次元」次元としての意味がつく．

# ここまで来たよ

22 同次連立 1 次方程式

23 同次連立 1 次方程式と線形写像・非同次連立 1 次方程式の解
- 写像と連立 1 次方程式
- 非同次連立 1 次方程式

L23-Q1

## Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f : X \to Y$ で，$X = Y = \mathbb{R}^2$ とする．$f$ は次の $A$ で表されるとする．すなわち，$f(\vec{x}) = A\vec{x}$.
$\{\vec{0}\} \subset Y$ の逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) \subset X$ を求めて平面 $X$ 上に描こう．
$X$ の像すなわち値域 $f(X) \subset Y$ を求め，平面 $Y$ 上に描こう．

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 次元以上の場合，線形独立 線形代数☆演習 II(2025)L?? の考えが必要になる．

# 復習：写像の逆像 線形代数☆演習 I(2025)L15

写像 $f : X \to Y$,　　$X$: 定義域, $Y$: 終域

## 定義 (復習：部分集合の像 線形代数☆演習 I(2025)L12)

写像 $f : X \to Y$ と，定義域の部分集合 $S \subset X$ に対して，
$\{f(x)|x \in S\} \subset Y$ を，$f$ による $S$ の像といい，$f(S)$ と書く．

## 定義 (集合の逆像 教科書に追加)

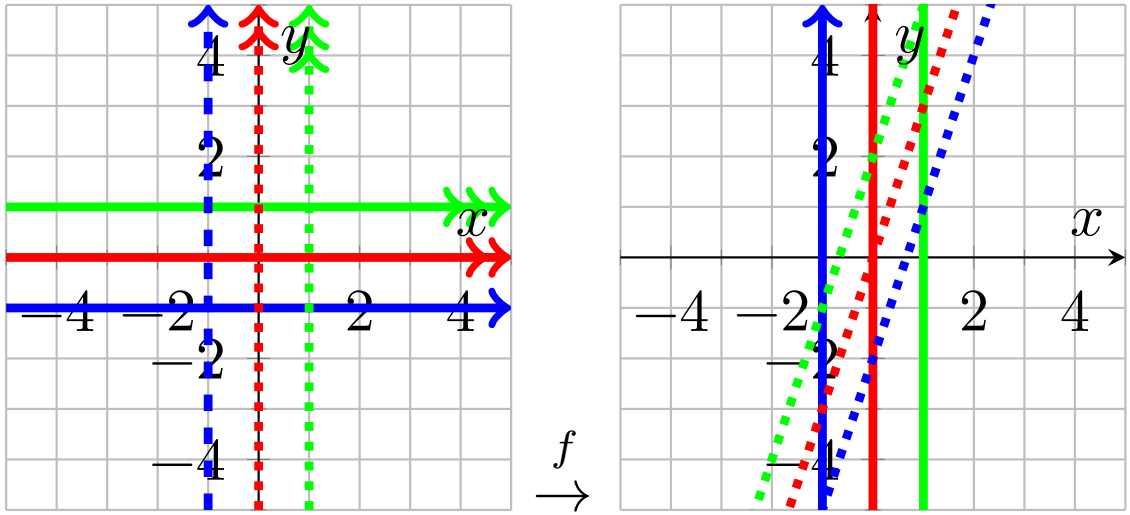
部分集合 $T \subset Y$ に対して，$X$ の部分集合 $\{x \in X|f(x) \in T\}$ を，$f$ による $T$ の逆像といい，$f^{-1}(T)$ とかく．

## 定義 (復習：値域 (range) 線形代数☆演習 I(2025)L12)

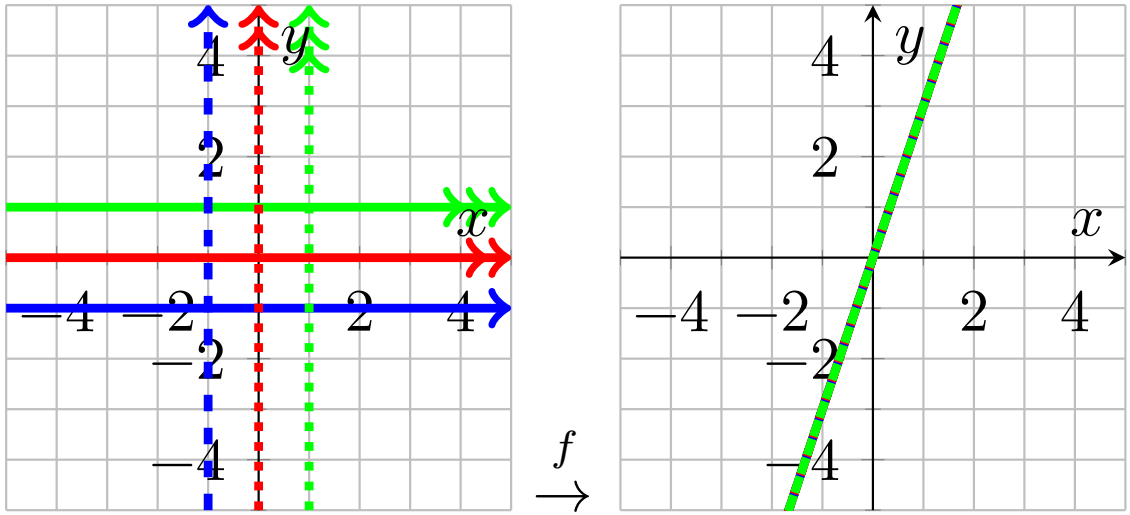
定義域の像 $f(X) = \{f(x)|x \in X\} \subset Y$ を $f$ の値域という．

teamL12 線形代数☆演習 I(2025)L12

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の表す線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.




$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ の表す線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



# 方程式の解と逆像再訪

線形代数☆演習 I(2025)L15

## 逆像

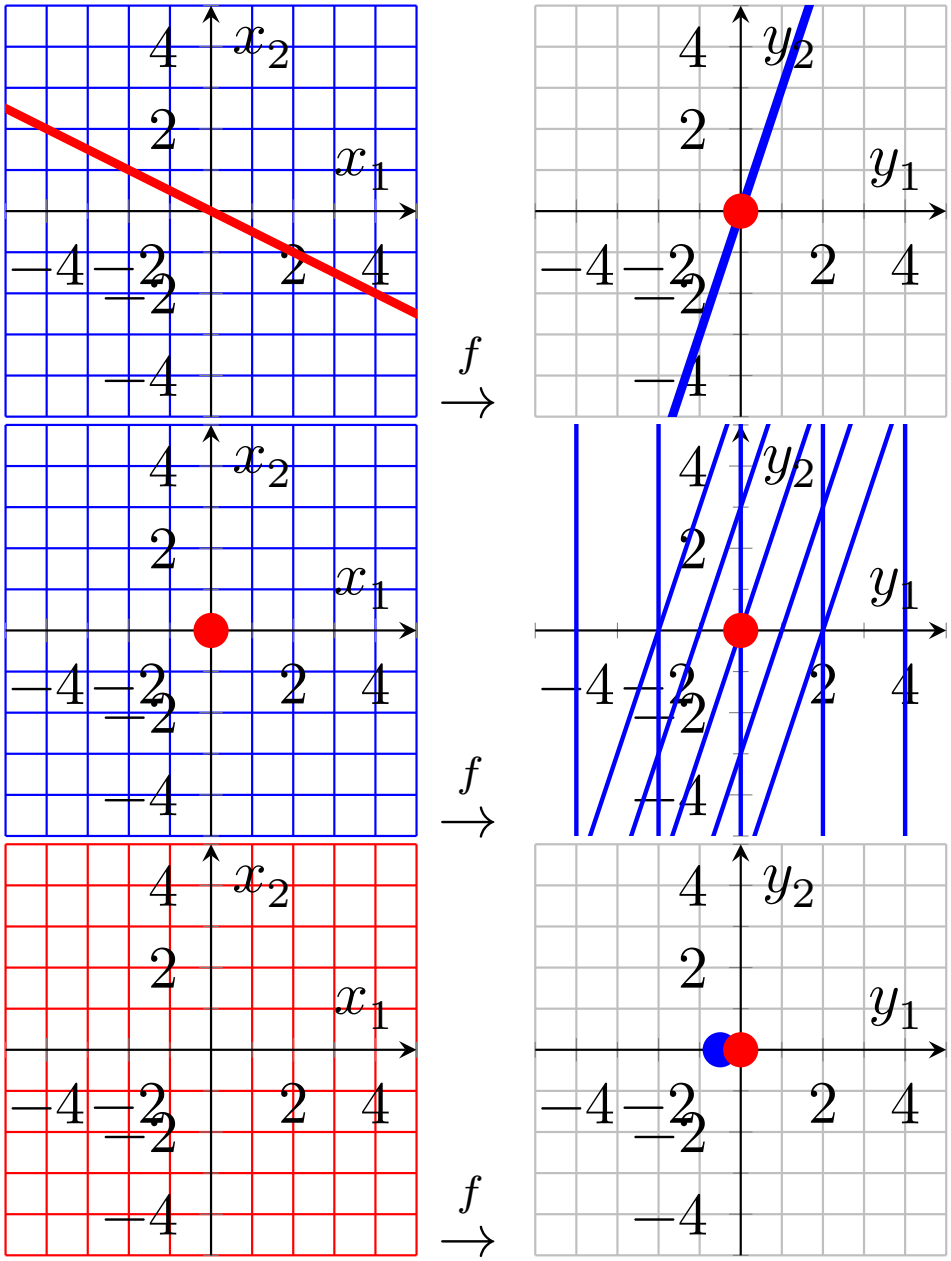
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の表す線形写像 $f : X \to Y$ を考える.
($X = \mathbb{R}^2 = Y$ だから線形変換と言ってもいい)

連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ を解け ⇔ 解空間を求めよ ⇔
逆像 $W = f^{-1}(\{\vec{0}\}) \subset X$ を求めよ

$\{\vec{0}\}$ の，線形写像 $f$ による逆像を核 (kernel) $\mathrm{Ker} f$ といい，
線形代数☆演習 II(2025)L?? の重要登場人物.

$f$ の値域 $\mathrm{Im} f$ を求めよ

$X$ の任意の元 $\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \vec{e}_1 s + x_2 \vec{e}_2 t$ $(s, t \in \mathbb{R})$ に対して，
$f(\vec{x}) = f(\vec{e}_1)s + f(\vec{e}_2)t$
'線形写像は $f(\vec{e}_i)$ だけで決まる'


$x_2$
$x_1$
$y_2$
$y_1$
$f$
$\longrightarrow$

$n = 2$

| $A$ | $n$<br>定義域 $\mathbb{R}^n$<br>の「次元」 | $\operatorname{rank} A$<br>像 $f(\mathbb{R}^n)$<br>の「次元」 | 解の自由度=任意定数の個数<br>$A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間 (核)<br>の「次元」 |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ | 2(平面) | 2(平面) | 0(1 点) |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ | 2(平面) | 1(直線) | 1(直線) |
| $O$ | 2(平面) | 0(1 点) | 2(平面) |
| | 全体 | 「残る分」 | 「圧縮」される分 |

# ここまで来たよ

22 同次連立 1 次方程式

23 同次連立 1 次方程式と線形写像・非同次連立 1 次方程式の解
- 写像と連立 1 次方程式
- 非同次連立 1 次方程式の解

# 非同次連立 1 次方程式の解 石村畑 線形代数 §4.6 I

$A\vec{x} = \vec{b}$ を解け.

拡大係数行列の簡約階段化が次のように得られたとする.

$$(A|\vec{b}) \to (A'|\vec{b}') = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{array}\right)$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

# 非同次連立 1 次方程式の解 石村畑 線形代数 §4.6 II

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は，

$$\begin{aligned} 0x_1+ \quad & x_2+ \quad && 2x_4+ \quad && 4x_6 = \quad b_1 \\ & \quad x_3+ \quad && 3x_4+ \quad && 5x_6 = \quad b_2 \\ & \quad && \quad x_5+ \quad && 6x_6 = \quad b_3 \\ & \quad && \quad && \quad 0 = \quad b_4 \end{aligned}$$

$b_4 \neq 0$ のとき，解なし．解集合は $\emptyset$
$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} (A|\vec{b})$ ならば解なし（実は必要十分条件）

$b_4 = 0$ のとき，
すなわち $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} (A|\vec{b})$ のとき，
解が存在することを見よう．

例 拡大係数行列の簡約化が次のように得られたとする.

$$(A|\vec{b}) \to (A'|\vec{b}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

この拡大係数行列が定める連立 1 次方程式は,

$$\begin{aligned} 0x_1 + \quad x_2 + \quad 2x_4 + \quad 4x_6 &= b_1 \\ x_3 + \quad 3x_4 + \quad 5x_6 &= b_2 \\ x_5 + \quad 6x_6 &= b_3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

主成分 (ピボット) に対応する $x_2, x_3, x_5$ は，左辺の 1 個所にしか現れない（しかも係数 1 で）から，これらについて解くのは簡単.

$$\begin{aligned} x_2 &= b_1 - 2x_4 - 4x_6 \\ x_3 &= b_2 - 3x_4 - 5x_6 \\ x_5 &= b_3 \qquad\qquad - 6x_6 \end{aligned}$$

(他にも書くべきことあり)

主成分（ピボット）に対応しない $x_1, x_4, x_6$ は任意だが，求めるべき量なので，右辺に現れるのを放っておくわけにはいかない．同等に扱うため，任意の実数 $s, t, u$ を使って，$x_1 = s$, $s \in \mathbb{R}$ 任意，のように書く.

## 解の答え方 1（解があるとき）

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \quad s \\
x_2 &= b_1 \quad -2t -4u \\
x_3 &= b_2 \quad -3t -5u \\
x_4 &= \qquad d \\
x_5 &= b_3 \qquad -6u \\
x_6 &= \qquad\qquad u \quad (s,t,u \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})
\end{aligned}
$$

## 解の答え方 2（解があるとき）ベクトルの形でも書ける.

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (s,t,u \in \mathbb{R})
$$

L23-Q2

## Quiz(拡大係数行列から連立 1 次方程式の解)

変数 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$ に関する連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の拡大係数行列 $(\vec{A}|\vec{b})$ の簡約階段化を基本変形により求めたところ，次のようになった．

$$(\vec{A}|\vec{b}) \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $A\vec{x} = \vec{b}$ と同値な連立 1 次方程式を，行列を使わずに書こう．
2. 解はあるか．任意定数 $s, t, \cdots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ \quad \vdots \\ x_6 = \end{cases}$ の形に書こう．
3. 任意定数 $s, t, \cdots \in \mathbb{R}$ を使って，解を $\vec{x} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 s + \vec{v}_2 t + \ldots$ の形に書こう．

石村畑 線形代数 問題 35,36

# 非同次連立 1 次方程式の解の性質

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L24(2025-07-02 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-02 Wed 08:01 JST hig"

今日の目標

- 非同次連立 1 次方程式の解集合を求められる.
- 非同次連立 1 次方程式の解集合を，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}\})$ と見られる.

L23-Q1

## Quiz 解答: 線形写像の逆像と値域

逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{x | A\vec{x} = \vec{0}\} \subset X$，すなわち $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間.

1. $A_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，解の自由度は 1，逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ は解空間に等しく，$\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} s | s \in \mathbb{R}\}$. すなわち，原点 $\vec{0}$ を通り $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線.
   値域は $\{A\vec{x} | \vec{x} \in X\} = \{A_1 \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} | s, t \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (s + 2t) | s, t \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u | u \in \mathbb{R}\} \subset Y$.
   すなわち，原点 $\vec{0}$ を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行な直線.
2. $A_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より解の自由度は 0. 逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ は解空間に等しく，解空間は自明な解 $\vec{0}$ のみからなる $\{\vec{0}\}$.
   $\det A_2 \neq 0$ なので，$\vec{x} = A_2^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ によっても求められる.
   値域は $\{A_2\vec{x} | \vec{x} \in X\} = \{A_2 \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} | s, t \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t | s, t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 = Y$.
   このことは，任意の $\vec{y} \in Y = \mathbb{R}^2$ に対して，$\vec{x} = A_2^{-1}\vec{y}$ ととると，$f(\vec{x}) = \vec{y}$ となることからもわかる.

3. $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より解の自由度は 2 で．逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ は解空間に等しく，$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t | s, t \in \mathbb{R}\}$ すなわち，$X = \mathbb{R}^2$ 全体．
   任意の $\vec{x} \in X$ に対して $A_0\vec{x} = \vec{0}$ より，値域は $\{\vec{0}\} \subset Y$.

L23-Q2

## Quiz 解答: 拡大係数行列から連立 1 次方程式の解

1. $$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_5 + 5x_6 &= 7, \\ x_4 + 4x_5 + 6x_6 &= 8, \\ 0 &= a, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

2. $a \neq 0$ のとき，$\operatorname{rank} A = 2 < \operatorname{rank}(A|\vec{b}) = 3$ なので解なし．実際，3 番目の式が直ちに矛盾している．
   $a = 0$ のとき, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\vec{b}) = 2$ であり解が存在する．
   $s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を任意定数として，

$$
\begin{aligned}
x_1 &= s, \\
x_2 &= 7 - 2t - 3u - 5v, \\
x_3 &= t, \\
x_4 &= 8 - 4u - 6v, \\
x_5 &= u, \\
x_6 &= v.
\end{aligned}
$$

3. $a \neq 0$ のとき解なし.
   $a = 0$ のとき，$s, t, u, v \in \mathbb{R}$ を任意定数として，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

## 定理 (非同次連立 1 次方程式の解の存在と自由度 石村畑 線形代数 定理 4.6.1)

$A$ を $m \times n$ 行列とする.
$n$ 変数の連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ (*) の拡大係数行列を $(A|\vec{b})$ とする.

1. $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}(A|\vec{b}) \Leftrightarrow$ (*) が解を持たない
2. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\vec{b}) = n \Leftrightarrow$ ただ 1 つの解を持つ
   - 解の自由度は $n - \operatorname{rank} A = 0$
   - $\vec{b} = 0$ のとき「自明な解 $\vec{x} = 0$ のみ持つ」
3. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\vec{b}) < n \Leftrightarrow$ 解を無限個持つ
   - 解の自由度は $n - \operatorname{rank} A > 0$. 解は $n - \operatorname{rank} A$ 個の任意定数を持つ.
   - $\vec{b} = 0$ のとき「無数の非自明な解を持つ」

, mobius IH4.6

# L24-Q1

## Quiz(拡大係数行列の簡約階段形から解の有無と解の自由度)

次の拡大係数行列 $(A|\vec{b})$ を持つ連立 1 次方程式は解を持つか？ 解を持つなら解の自由度，解が一意的であるかどうかを答えよう．

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

石村畑 線形代数 問題 35,36

# 非同次連立 1 次方程式の解集合の分類

$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}(A|\vec{b})$ のとき解集合 $f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \emptyset$.
$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\vec{b})$ のとき解集合 $f^{-1}(\{\vec{b}\}) \neq \emptyset$.
$n = \operatorname{rank} A +$ 自由度 で定まる自由度だけの広がりを持つ.
$n = 2$ の例

| | $n$<br>定義域 $\mathbb{R}^n$<br>の「次元」 | $\operatorname{rank} A$<br>値域 $f(\mathbb{R}^n)$<br>の「次元」 | 解の自由度=任意定数の個数<br>$A\vec{x} = \vec{b}$ の解集合<br>の「次元」 |
|---|---|---|---|
| | 2(平面)<br>2(平面)<br>2(平面) | 2(平面)<br>1(直線)<br>0(1 点) | 0(1 点)<br>1(直線)<br>2(平面) |
| | 全体 | 「残る分」 | 「圧縮」される分 |

線形代数☆演習 I(2025)L23 の逆像と値域再訪 teamL23-1

L24-Q2

## Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f : X \to Y$ で，$X = Y = \mathbb{R}^2$ とする．$f$ は次の $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ で，$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表される．

1. $f$ の値域 $f(X) \subset Y$ を求めよう．
2. $\vec{b}_0 = \vec{0}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_0\})$ を求めよう= $f(\vec{x}) = \vec{b}_0$ の解集合を求めよう．
3. $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\})$ を求めよう= $f(\vec{x}) = \vec{b}_1$ の解集合を求めよう．
4. $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_2\})$ を求めよう= $f(\vec{x}) = \vec{b}_2$ の解集合を求めよう．
5. 上の解集合の，$x_1$ 軸 $(x_2 = 0)$, $x_2$ 軸 $(x_1 = 0)$ との共有点をそれぞれ求めよう．

石村畑 線形代数 §1.3

## 命題

非同次連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解なしになるのは，写像 $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ の値域に $\vec{b}$ が属さないとき．
$\vec{b} = \vec{0}$ は必ず値域に含まれるため，同次連立 1 次方程式は必ず自明な解を持つ．

同じ $\vec{b}$ で，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_0 = O$ の場合は解はあるか？

## 命題

$A\vec{x} = \vec{b}$ に解があるとき，対応する同次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ と比較すると，解空間は，$\vec{b}$ だけ平行移動した，平行な集合になっている．

線形代数☆演習 I(2025)L22 の同次連立 1 次方程式再訪

L24-Q3

## Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f : X \to Y$ で，$X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^2$ とする．$f$ は次の $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 18 & 12 \end{pmatrix}$ で，$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表される．

1. $f$ の値域 $f(X) \subset Y$ を求めよう．
2. $\vec{b}_0 = \vec{0}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_0\})$ を求めよう= $f(\vec{x}) = \vec{b}_0$ の解集合を求めよう．
3. $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\})$ を求めよう= $f(\vec{x}) = \vec{b}_1$ の解集合を求めよう．
4. $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_2\})$ を求めよう= $f(\vec{x}) = \vec{b}_2$ の解集合を求めよう．
5. 上の解集合の，$x_1x_2$ 平面 $(x_3 = 0)$ との共有点を求めよう．
6. 上の解集合の，$x_1$ 軸 $(x_2 = x_3 = 0)$ との共有点をそれぞれ求めよう．

石村畑 線形代数 §1.4 | 線形代数☆演習 I(2025)L06

# 平面のパラメタ表示 teamL08

$n = 3$ の例

| | $n$<br>定義域 $\mathbb{R}^n$<br>の「次元」 | $\operatorname{rank} A$<br>値域 $f(\mathbb{R}^n)$<br>の「次元」 | 解の自由度=任意定数の個数<br>$A\vec{x} = \vec{b}$ の解集合<br>の「次元」 |
|---|---|---|---|
| | 3(空間)<br>3(空間)<br>3(空間)<br>3(空間) | 3(空間)<br>2(平面)<br>1(直線)<br>0(1 点) | 0(1 点)<br>1(直線)<br>2(平面)<br>3(空間) |
| | 全体 | 「残る分」 | 「圧縮」される分 |

# 図形（部分集合）を表現する 2 つの方法

石村畑 線形代数 §1.3 直線のパラメタ表示と方程式 teamL06

石村畑 線形代数 §1.4 線形代数☆演習 I(2025)L06 平面のパラメタ表示 teamL08

| | パラメタ表示 | 方程式 |
|---|---|---|
| 写像の言葉で | 像 | 逆像 |
| 例 | $\{\vec{p}(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ | $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = 0\}$ |
| | 写像 $\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ の値域 $f(\mathbb{R})$ | $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の逆像 $f^{-1}(\{0\})$ |
| 形容詞 | 陽（的）な表現<br>明示的な<br>explicit | 陰（的）な表現<br>非明示的な<br>implicit |

L24-Q4

## Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f : X \to Y$ で，$X = Y = \mathbb{R}^2$ とする．$f$ は次の $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で，$f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表される．

1. $f$ の値域 $f(X) \subset Y$ を求めよう．
2. $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\})$ を求めよう= $f(\vec{x}) = \vec{b}_1$ の解集合を求めよう．
3. 上の値域と逆像をを描こう

# 授業の進行について連絡

- 2025-07-09 水 1 L26 TrialL25 は対面でなく後日のレポート 1 提出
  - レポートの提出は Manaba や Teams や授業内手渡しでなく，特定日時，特定場所で手渡しです．これは，数理・情報科学課程にまつわる場所や人を探検することがレポートの目的のひとつであるためです（龍谷ミュージアムレポートのようなもの）．特に，授業内に樋口は受け取りません．
- 2025-07-11 金 1 L27 教室変更 計算機実習室 1-609（情報基礎と同じ）
- 2025-07-16 水 1 L28 TrialL27 は対面でなく後日レポート 2 提出予定
- 2025-07-18 金 1 L29
- 2025-07-23 水 1 L30
- Trial L30 は Mobius or レポート 3（特定の日でない）
- LearnMoodle 成績評価方法のお知らせ 線形代数☆演習 I(2025)L23
  - 2025-07-30 水 1 任意参加小テスト
  - 2025-08-01 金 1 何もなし
- 2025-09-08? 全科目共通成績発表

# 線形変換の像と逆像・線形独立

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L25(2025-07-04 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-09 Wed 21:12 JST hig"

今日の目標

- 2,3 次元の空間の間の線形写像について，値域や逆像を求め描ける
- 2,3 個のベクトルの組の線形独立性を説明できる

石村畑 線形代数 §1.4

# Quiz 解答: 線形写像の逆像と値域

1. 任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in X$ $(s, t \in \mathbb{R})$ に対して，$A\vec{x} = A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u$, ここで $u = s + 2t \in \mathbb{R}$.
   よって，
   値域 $f(X) = \{A\vec{x} | \vec{x} \in X\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u | u \in \mathbb{R}\} \subset Y$.
   すなわち，原点 $\vec{0}$ を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行な直線.
2. 逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{x | A\vec{x} = \vec{0}\} \subset X$，すなわち $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間.
   同次方程式なので解は存在する．$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，解の自由度は 1，逆像は解空間に等しく，$f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} s | s \in \mathbb{R}\}$. すなわち，原点 $\vec{0}$ を通り $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行な直線.
3. $(A|\vec{b}_1) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   $1 = \operatorname{rank} A < \operatorname{rank} (A|\vec{b}_1) = 2$ より，解なし.
   逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\}) = \emptyset$.

4. $(A|\vec{b}_2) \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
   $1 = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\vec{b}_2) = 1$ より，解あり．
   解の自由度は $2 - 1 = 1$，逆像は解集合に等しく，
   $f^{-1}(\{\vec{b}_2\}) = \{\binom{12}{0} + \binom{-2}{1} s | s \in \mathbb{R}\}$. すなわち，$\binom{12}{0}$ を通り $\binom{-2}{1}$ に平行な直線．
5. 

なお，
$A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ の表す線形写像 $f_2$ について，値域は $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. 逆像はすべて 1 点 $f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \{A^{-1}\vec{b}\}$.
$A_0O$ の表す線形写像 $f_0$ について，値域は $f(\mathbb{R}^2) = \{\vec{0}\}$. 逆像は，
$f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$, $f^{-1}(\{\vec{b}\}) = \emptyset$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$.

# ここまで来たよ

24 非同次連立 1 次方程式の解の性質

25 線形変換の像と逆像・線形独立
- 線形写像の値域と逆像
- 2,3 次元の線形独立性

線形代数☆演習 I(2025)L22 の同次連立 1 次方程式再訪

L25-Q1

## Quiz(線形写像の逆像と値域)

線形写像 $f : X \to Y$ で，$X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^2$ とする．$f$ は，$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 18 & 12 \end{pmatrix}$ で $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ と表される．

1. $f$ の値域 $f(X) \subset Y$ を求めよう．
2. $\vec{b}_0 = \vec{0}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_0\}) \subset X$ を求めよう=「$f(\vec{x}) = \vec{b}_0$ の解集合」を求めよう．
3. $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\})$ を求めよう $= \cdots$
4. $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$ に対して，逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_2\})$ を求めよう $= \cdots$
5. $f(\vec{x}) = \vec{b}_2$ の解集合の，$x_1x_2$ 平面 $(x_3 = 0)$ との共有点を求めよう．
6. $f(\vec{x}) = \vec{b}_2$ の解集合の，$x_1$ 軸 $(x_2 = x_3 = 0)$ との共有点を求めよう．

石村畑 線形代数 §1.4 | 線形代数☆演習 I(2025)L06 平面のパラメタ表示 | 線形代数☆演習 I(2025)L08 共有点 teamL08

$n = 3$ の例

| | $n$<br>定義域 $\mathbb{R}^n$<br>の「次元」 | $\operatorname{rank} A$<br>値域 $f(\mathbb{R}^n)$<br>の「次元」 | 解の自由度=任意定数の個数<br>$A\vec{x} = \vec{b}$ の解集合<br>の「次元」 |
|---|---|---|---|
| | 3(空間)<br>3(空間)<br>3(空間)<br>3(空間) | 3(空間)<br>2(平面)<br>1(直線)<br>0(1 点) | 0(1 点)<br>1(直線)<br>2(平面)<br>3(空間) |
| | 全体 | 「残る分」 | 「圧縮」される分 |

# ここまで来たよ

24 非同次連立 1 次方程式の解の性質

25 線形変換の像と逆像・線形独立
- 線形写像の値域と逆像
- 2,3 次元の線形独立性

# 線形独立

線形独立 (1 次独立，linear independent), 線形従属 (1 次従属, linear dependent) は，線形代数 II の重要概念．定義は 石村畑 線形代数 §5.3 .
ここでは，平面ベクトル，空間ベクトルに限った場合 石村畑 線形代数 p.13 を不完全に扱う．

## 定義 (線形結合，1 次結合 (linear combination) 石村畑 線形代数 p.154 )

ベクトルの組 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ の線形結合とは，スカラー $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ を係数とする和

$$c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_k\vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$$

のことを言う．

## 定義 (線形従属 石村畑 線形代数 p.155)

ベクトルの組 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が線形従属であるとは，$\vec{a}_i$ のいずれかが，他の $\vec{a}_j (i \neq j)$ の線形結合で表せることを言う．

## 定義 (線形独立 石村畑 線形代数 p.155)

ベクトルの組 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が線形独立であるとは，線形従属でないことを言う．すなわち，$\vec{a}_i$ のいずれもが，他の $\vec{a}_j (i \neq j)$ の線形結合で表せないことを言う．

線形独立とは「$k$ 人全員が役割を果たしていること」

## 例 (ベクトル 2 個組の線形従属性)

ベクトルの組 $\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\6\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ は線形従属.
ベクトルの組 $\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ は線形従属.
ベクトルの組 $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-6\\-4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は線形従属.

2 つのベクトルが平行なとき，または一方が $\vec{0}$ のとき線形従属.（一方が他方のスカラー倍のとき）

## 例 (ベクトル 2 個組の線形独立性)

ベクトルの組 $\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\-6\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ は線形独立.
ベクトルの組 $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は線形独立.

2 つのベクトルが平行でなく，どちらも $\vec{0}$ でないとき線形独立.（一方が他方のスカラー倍でないとき）
2 つのベクトルが（つぶれてない）平行四辺形を作るとき.

## 例 (ベクトル 3 個組の線形従属性)

ベクトルの組 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は線形従属.

ベクトルの組 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は線形従属.

3 つのベクトルが一平面内（含むひとつが $\vec{0}$ ）のとき線形従属.

## 例 (ベクトル 3 個組の線形独立性)

ベクトルの組 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は線形独立.

ベクトルの組 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は線形独立.

3 つのベクトルが平面内にないとき線形独立.

3 つのベクトルが（つぶれてない）平行六面体を作るとき.

## 命題 (平面ベクトル 2 個の線形独立性)

ベクトルの 2 個組 $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ が線形独立であることと次は同値

- 2 次正方行列 $(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ が階数 2, 正則 石村畑 線形代数 定理 5.3.1
- $\det(\vec{a}_1\ \vec{a}_2) \neq 0$ 石村畑 線形代数 定理 5.3.1

## 命題 (空間ベクトル 3 個の線形独立性)

ベクトルの 3 個組 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ が線形独立であることと次は同値

- 3 次正方行列 $(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ が階数 3, 正則 石村畑 線形代数 定理 5.3.1
- $\det(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \neq 0$ 石村畑 線形代数 定理 5.3.1

# 線形独立であるかどうかによって変わること

線形写像 $f : X \to Y,\ X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^2$ が 2 次正方行列 $A = (::) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ で表されるとする．
$f$ の値域は？
任意の点 $\binom{s}{t} \in X, s, t \in \mathbb{R}$ を写すと，$f(\binom{s}{t}) = \vec{a}_1 s + \vec{a}_2 t\ (s, t \in \mathbb{R})$
これは，平面のパラメタ表示に似てるが，平面全体を動くのだろうか？

- 線形従属のとき，No．実際に動くのは直線（や一点）
- 線形独立のとき，Yes．

L25-Q2

## Quiz(線形独立・線形従属)

次のベクトルの組は線形独立かどうか, 答えよう.

1. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

# 逆行列の行基本変形による計算

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L26(2025-07-09 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-09 Wed 15:10 JST hig"

今日の目標

- 行基本変形で，正方行列が正則かどうか判定できる
- 行基本変形で，正則行列の逆行列を求められる

石村畑 線形代数 §4.7

L25-Q1

## Quiz 解答: 線形写像の逆像と値域

1. 任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \in X$ $(s,t,u \in \mathbb{R})$ に対して，$A\vec{x} = A\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} v$,
ここで $v = 2s + 6t + 4u \in \mathbb{R}$. よって，値域
$f(X) = \{A\vec{x} | \vec{x} \in X\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} v | v \in \mathbb{R}\} \subset Y$.
すなわち，原点 $\vec{0}$ を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行な直線.
2. 逆像 $f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{x | A\vec{x} = \vec{0}\} \subset X$，すなわち $A\vec{x} = \vec{0}$ の解空間.
同次方程式なので解は存在する．$A \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より，解の自由度は
$3 - 1 = 2$,
逆像は解空間に等しく，
$f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \right\} =$
$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}$. これは，原点 $\vec{0}$ を通り
$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を接ベクトルとする平面.

3. $(A|\vec{b}_1) \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
   $1 = \operatorname{rank} A < \operatorname{rank}(A|\vec{b}_1) = 2$ より，解なし．逆像 $f^{-1}(\{\vec{b}_1\}) = \emptyset$.
4. $(A|\vec{b}_2) \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
   $1 = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\vec{b}_2) = 1$ より，解あり．自由度は $3-1=2$. 逆像は解集合に等しく，$f^{-1}(\{\vec{b}_2\}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$. すなわち，$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を通り $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を接ベクトルとする平面.
5. 共有点は $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ かつ $x_3 = 0$ を満たす点．この非同次連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約階段化すると，

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

よって，共有点の集合は

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 3x_2 = 6, x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s \middle| s \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. 共有点は $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ かつ $x_2 = x_3 = 0$ を満たす点．この非同次連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約階段化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解は $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
問に対して必須ではないが，集合として答えるなら，

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 = 6, x_2 = x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

# ここまで来たよ

25 線形変換の像と逆像・線形独立

26 逆行列の行基本変形による計算
- 行基本変形による逆行列の計算方法

# 行基本変形による逆行列の計算方法

石村畑 線形代数 §4.7

$n \times n$ 行列 $A$ の逆行列 $X = A^{-1}$ を求めたい．
逆行列の定義は「$AX = XA = E$ を満たす行列」
$n = 3$ で具体的に．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

未知数 $x_{ij}$ に対する $n \times n = 9$ 元連立 1 次方程式を解いて，$x_{ij}$ を求めればいいのでは？
よく見ると，未知数は 3 グループに分かれる．

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, A\vec{x}_3 = \vec{e}_3.$$

よって，$n = 3$ 個の拡大係数行列

$$(A|\vec{e}_1), (A|\vec{e}_2), (A|\vec{e}_3)$$

をそれぞれ簡約階段化すればいい．

その操作を考えると…$A$ を $E$ にするところまでは共通.

$$(A|\vec{e}_1|\vec{e}_2|\vec{e}_3) \to (E|\vec{x}_1|\vec{x}_2|\vec{x}_3)$$

と簡約階段形にすればいい.

## 逆行列を求める筆算 石村畑 線形代数 p.144

$n$ 次正方行列 $A$ が与えられたとき, $n \times (2n)$ 行列 $(A|E)$ を考え, **行**基本変形で (掃き出し法で) 簡約階段形にする.

$$(A|E) \to \cdots \to (E|B)$$

となったなら, $A$ は正則で, $B$ が求める逆行列 $B = A^{-1}$.

$A^1$ に施して，簡約階段形 $E = A^0$ にする，ような行基本変形は，
$E = A^0$ に施すと，$A^{-1}$ にする.
`https://learn.hig3.net/` 動画 逆行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ で実演.

# 行基本変形計算機



https://linalg.hig3.net/redmatrix
「自分の操作の履歴」
範囲指定スクリーンショット

Windows 11 Windows+Shift+S
Mac Command+Shift+4

でデスクトップにファイルができる.

# 復習：掃き出し法の概要

線形代数☆演習 I(2025)L21

段に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, RIII によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分 $c$ を RI $①\times(1/c)$ で 1 にする
(4) RII $ⓘ+①\times(-a)$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の $a$ を零にする
(5) RII $ⓘ+①\times(-a)$ で, ブロックのその列の上側を零にする
* これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(5) を「再帰的に」行う
* 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

# 復習：掃き出し法 (簡略版)

線形代数☆演習 I(2025)L21

## 掃き出し法の概要 (簡略版)

行 $\textcircled{i}$ にあるピボットを右下に 1 行ずつ移動しながら，

1. なるべく近い，ゼロばかりでない列を相手にする
2. RIII 必要なら $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$ でゼロでない成分を行 $\textcircled{i}$ に持ってくる (ピボットにする)
3. RI 必要なら $\textcircled{i} \times \frac{1}{c}$ でピボットを 1 にする
4. RII $\textcircled{k} + \textcircled{i} \times (-a)$ でピボットの下ぜんぶをゼロにする
5. RII $\textcircled{k} + \textcircled{i} \times (-a)$ でピボットの上ぜんぶをゼロにする

L26-Q1

## Quiz(逆行列)

次の行列は正則か？ $(A|E)$ を行基本変形によって簡約階段形にすることによって判定しよう（行列式を計算するのではなく）.
正則なら逆行列を答えよう（行列式と余因子行列を計算するのでなく，$(A|E)$ を行基本変形によって簡約階段形にすることで）. 正則でないなら階数を答えよう.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

mobius IH4.7, 石村畑 線形代数 問題 37, 総合演習 4 問 3, レポート 2=trialL27 になる予定

# 正則か？ の判定

## 命題 (正則と階数の関係)

$n$ 次正方行列 $A$ の階数 $\operatorname{rank} A = n$ なら正則，正則なら $\operatorname{rank} A = n$
(とうことは，階数 $\operatorname{rank} A < n$ なら正則でない，正則でないなら $\operatorname{rank} A < n$)

### 証明

- $\operatorname{rank} A = n$ とする．$n$ 組の連立 1 次方程式にはすべて解がある．よって $X = A^{-1}$ が存在する．よって $A$ は正則．
- $A$ が正則とする．$A^{-1}$ が存在する．$n$ 組の連立 1 次方程式にはすべて解がある．よって，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|E)$. (背理法) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|E) < n$ だとすると，$n$ 組の方程式の自由度はすべて正で，解は一意的でない．しかし $A^{-1}$ は一意的なので矛盾．よって，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|E) = n$.

## 「$A$ が正則であるかどうか調べ, 正則であればその逆行列を求めよ」

- 「逆行列の求め方」で, $(A|E)$ を簡約階段形に基本変形する. $(E|B)$ に到達したなら逆行列 $B = A^{-1}$ が得られる.
- 簡約階段化で $(E|B)$ に到達しないなら，$\operatorname{rank} A < n$ ということ．よって正則でない. 副産物として $\operatorname{rank} A$ が求まる.

## 行列 $A$ が正則かどうかの，その他の判定方法

- 正則であるためには，正方行列 ($n$ 行 $n$ 列) であることが大前提.
- 行列式 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$は正則

### たまたま判定できるケース

- $n = 2$ なら，$\Delta = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は正則. $\Delta = 0$ なら正則でない.
- $XA = AX = E$ となる $X$ がたまたま見つかれば正則（もともとの定義）.
- $A$ にうまく行基本変形して，線形代数☆演習 I(2025)L18 p.16 行列式がゼロである行列の形に持って行けるなら正則でない.

L26-Q2

## Quiz(逆行列)

次の行列は正則か？ $(A|E)$ を行基本変形によって簡約階段形にすることによって判定しよう（行列式を計算するのではなく）.
正則なら逆行列を答えよう（行列式と余因子行列を計算するのでなく，$(A|E)$ を行基本変形によって簡約階段形にすることで）. 正則でないなら階数を答えよう.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

# 授業の進行について連絡

- 2025-07-09 水 1 L26. TrialL25 は対面でなく後日のレポート 1 提出
  - レポートの提出は Manaba や Teams や授業内手渡しでなく，特定日時，特定場所で手渡しです．これは，数理・情報科学課程にまつわる場所や人を探検することがレポートの目的のひとつであるためです（龍谷ミュージアムレポートのようなもの）．特に，授業内に樋口は受け取りません．
- 2025-07-11 金 1 L27. 教室変更 計算機実習室 1-609（情報基礎と同じ）各自で動画を見るため **教室設置 PC につながる有線イヤフォンまたはノート PC につながるイヤフォン持参**
- 2025-07-16 水 1 L28. TrialL27 は対面でなく後日レポート 2 提出予定
- 2025-07-18 金 1 L29.
- 2025-07-23 水 1 L30.
- Trial L30 は Mobius or レポート 3（特定の日でない）
- LearnMoodle 成績評価方法のお知らせ 線形代数☆演習 I(2025)L23
  - 2025-07-30 水 1 任意参加小テスト
  - 2025-08-01 金 1 何もなし
- 2025-09-08? 全科目共通成績発表

# 数式処理システム Maple

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L27(2025-07-11 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-10 Thu 16:14 JST hig"

今日の目標

- 数式処理を使う方法を説明できる.
- 数式処理システム Maple で線形代数の計算ができる. 簡約階段形や逆行列や行列式を求められる.
- 人工知能の数学の能力の現状を説明できる.

## L26-Q1

### Quiz 解答: 逆行列

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{基本操作}}{\to} \cdots \overset{\text{基本操作}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (E|A^{-1}).$$

よって，$\operatorname{rank} A = 3$ で，$A$ は正則であり，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

emark 低コストで $AA^{-1} = E$ を確かめて，正しい計算であることがわかる.

## L26-Q2

### Quiz 解答: 逆行列

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{②+①\times(-2)}{\to} (\cdots\cdots) \overset{③+①\times(-3)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{②\times(-1)}{\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{③+②\times 1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

左 3 列は $A$ の基本変形とみなせるので，ここまでで，$\operatorname{rank} A = 2$ がわかる．$A$ は 3 次正方行列だが，$\operatorname{rank} A < 3$ なので，$A$ は正則でない.

# 複数の基本操作を矢印や等号の上に書く場合の注意 I

これは複数の基本操作を 1 個ずつ順にやっていくことの略記.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{②+①\times(-1) \\ ①+②\times(-1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

つまり上の基本操作から順に行う基本変形と理解しないといけない.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{②+①\times(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{①+②\times(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

下の基本操作から行うと別の基本変形，別の結果になる．基本変形だから階数は同じ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{①+②\times(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{②+①\times(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

# 複数の基本操作を矢印や等号の上に書く場合の注意 II

基本操作を「同時に」行うのは基本変形ではない．例えば階数が変わってしまう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{②+①\times(-1) \\ ①+②\times(-1)}}{\not\to} \begin{pmatrix} 1\times(-1)+1 & 4\times(-1)+2 \\ 1\times(-1)+1 & 2\times(-1)+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

# ここまで来たよ

26 逆行列の行基本変形による計算

27 数式処理システム Maple
- 大規模言語モデル (LLM, ex. ChatGPT) と数学
- 数式処理システム Maple

# 龍大アカウントで使える生成 AI

Microsoft Copilot　Microsoft365 ライセンス下で.
`@mail.ryukoku.ac.jp` で要ログイン

- Teams
  - PC アプリ > 設定 > チャットとチャネル > Copilot をオン, チャット上部の Copilot
  - モバイルアプリ フォトアイコン > 設定 > Copilot をオン, 上部の虹輪 Copilot アイコン
- Web `https://m365.cloud.microsoft/chat/`
- Copilot モバイルアプリ `https://www.microsoft.com/ja-jp/microsoft-copilot/for-individuals/copilot-app`
- ログインした状態では，課金版同様に，入力した内容が学習に使われない（秘密の情報や個人情報を入力してよい）

# 大規模言語モデル (LLM, ex. ChatGPT) と数学

ChatGPT, Claude, Microsoft Copilot, Gemini などは，生成 AI のひとつである大規模言語モデル（に基づくサービス）の例.
`https://chatgpt.com` で次のように入力してみよう.

```
次の行列の逆行列を求めてください

1  2
3  4
```

```
次の行列は簡約階段形ですか？

3  0  2
0  1  0
0  0  2
```

```
123456*789012 # 97408265472?
```

```
Pythonで計算して

12345*56789 # 701060205
```

(以下のアドバイスは時とともに変化するだろうが)
LLM は

- 得意分野：プログラミング，経済学，語学，翻訳，法学
- 苦手分野：数学，心理学

現時点での LLM は，数学については
昨年度「豆知識に詳しく，妙に計算力があるが，どこか抜けてる 2 学年上の先輩（アドバイスはそのまま信じていいときもいけないときもある)」と思ってはどう？
今年度「豆知識に詳しく，時々論理力もあり，ふだんは計算力があるが，創造性はなく，どこか抜けてる 2 学年上の先輩（アドバイスはそのまま信じていいときもいけないときもある）$\times n$ 人」と思ってはどう？
LLM とは異質な外部システム「言語処理系」「数式処理システム」を呼び出すことによって弱点を補ってる．数学のプロは，これらの外部システムを直に扱うことも必要．

# ここまで来たよ

26 逆行列の行基本変形による計算

27 数式処理システム Maple
- 大規模言語モデル (LLM, ex. ChatGPT) と数学
- 数式処理システム Maple

# Maple とは

`https://jp.maplesoft.com/products/maple/`
Waterloo University, Canada で開発され Maplesoft 社で開発・販売される数式処理システム.
ライバル Mathematica, SymPy Python library
数式処理システム (CAS: Computer Algebra System) とは

- 量を整数変数 (int), 浮動小数点変数 (double) に記憶して扱うのでなく, 数式を文字列として (実はもっとハイテクな方法で) 記憶して処理するシステム. 無限大なども扱える. `"a+b"` と `"b+a"` は文字列として異なるが, 数式処理システムは, 表す数式の意味が同じであることを知っている.
- LLM との対比で言うと：できることは間違えない，答はいつも同じ，人間が CAS の文法で指示する必要がある，文法が厳密に決まっている.
- C のようにすべての手続きを人間が指示する必要があるが，その通り忠実に実行する.

プログラミング及び実習

# 龍大内で Maple を使える PC と場所

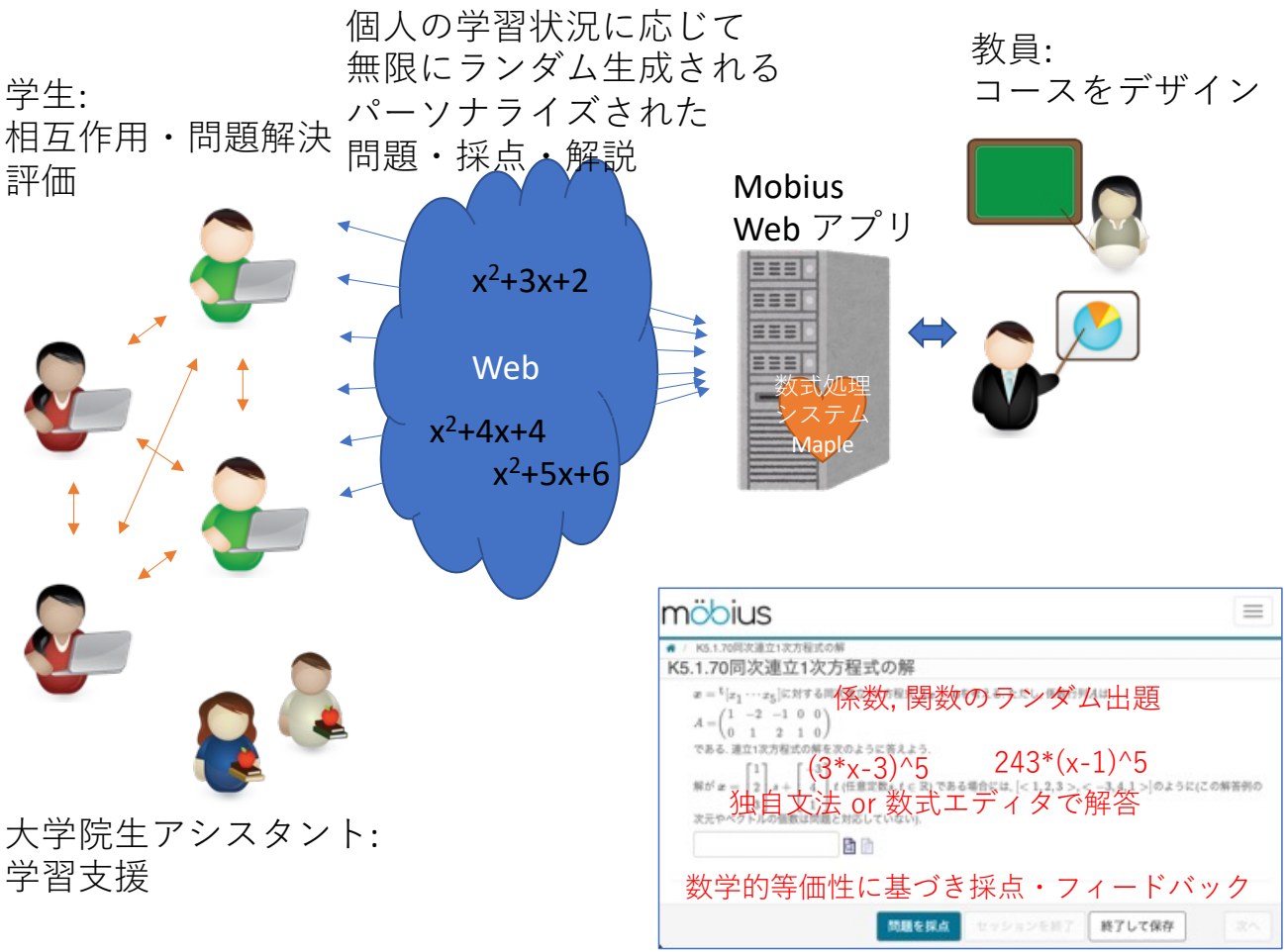
先端理工学部がサイトライセンスに加入しているため「キャンパス内では無料で」使用できます.

- (無料) 瀬田の学内実習室 (3 号館地下, 1 号館 (含む 1-612)) の Windows 11 で
- (無料) ru-wifi に接続した個人 PC
  - 任意の場所で各自でダウンロード, インストールした後, 使用時には ru-wifi に接続する. 使用時に activation (有効化) する.
  - 案内 (全学認証)`https://docs.google.com/document/d/1hqFjKZT5qRjEtg2BpZD7Nx1PTqf0gk6k1IQXfqTvIxw`
- (有料) サイトライセンスに頼らず, 生協で学生版 (Win/Mac) を購入 `https://software.univcoop.or.jp/item/16177`
  - ru-wifi への接続の必要なし
  - 在学中のみ利用可
  - Maple 2025 学生版は税込 13200 円

いずれも学習目的に限定.

# Web アプリケーション, 学習支援システムとは

Mobius は, 数式処理システム Maple をバックエンドとして, Web アプリケーション として構築された学習支援システム



# 実習課題 teamL27 の要約

LearnMoodle teamL27 の指示にしたがってください．動画を再生しながら，play, pause を繰り返して進むことを推奨．

1. mobius trialL27 の自分の問題の行列を取得する．
2. 配布した Maple ワークシートのサンプルを編集して，自分の行列 $A, B$ に代入して，最終結果の逆行列と行列式を計算してメモしておく．trialL27 の計算結果チェックに利用する．
   - 行基本変形計算機も，成分を入力することにより，計算に利用できる
   - 任意：mobius trialL25-Q1 の自分の拡大係数行列を $P$ に代入して，簡約階段化の検算にも利用できる．
3. 自分が編集した上のような編集した Maple ワークシート (ファイル名自由) を, LearnMoodle teamL27 にアップロードして提出する．

# Maple ワークシートのまとめ

- Enter 計算実行
- Shift+Enter 計算実行せず改行

左端の二重線　ブロック区切り
　T ボタン　テキストブロックを作る
　> ボタン　コードブロックを作る
　左端の >　プロンプト この右にコードを入力する



; 行の最後 (or 次の行との区切り) 省略可 (C でいう;)
: 非表示行末
:= 変数への代入 (C でいう=)
= 条件の等式 (C でいう==)
# ここから行末までコメント (C でいう//, /* */)

- 挿入 > Maple Input で, Mobius のテキスト入力相当 (お奨め) になる
- 挿入 > 2D Math で, Mobius の数式エディタ相当になる.
- 環境設定から, どちらをデフォルトにするか選べる (初期は 2D Math)

# Maple の文法

Mobius の解答入力と共通点多い

線形代数ライブラリの導入
行列, 列ベクトル, スカラーの変数代入

```
1 with(LinearAlgebra);
2 A:=<<1|2>,<3|4>>;
3 B:=<<5,6>|<7,8>>;
4 v:=<5,6>;
5 c:=-5;
6 P:=<<1|2|3>,<2|4|6>>;
```

$A + B$

$AB$

$A^3\vec{v}$

$c\vec{v}$

$B^{-1}$

$\det A$

$P \to$ 簡約階段形

```
1 A + B;
2 A . B; # .は行列の積. 表示は「・」
3 A^3 . v; # .は行列とベクトルの積.
4 c * v; # スカラー倍
5 MatrixInverse(B); # 逆行列
6 Determinant(A); # 行列式
7 ReducedRowEchelonForm(P); #簡約…
```

# 参考:Maple で 微積分

サンプルワークシートあり

グラフ描画 plot a graph

```
plot(sin(x)^2);
```

微分 differentiate

```
diff(sin(x)^2,x,2);
```

原始関数 integral

```
int(sin(x)^2);
```

定積分 integral

```
int(sin(x)^2,x=0..Pi/2);
```

積分の過程表示

```
with(Student:-Calculus1):
ShowSolution(int(sin(x)^2));
```

# 行基本変形による行列式の計算

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L28(2025-07-16 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-18 Fri 06:46 JST hig"

今日の目標

- 行基本変形を使って行列式を計算できる **教科書に追加**

# ここまで来たよ

27 数式処理システム Maple

28 行基本変形による行列式の計算
- 行列式
- 対角行列の復習

# 復習：行列式 石村畑 線形代数 §3

$n$ 次正方行列 $A$ に対して，行列 $\det A = |A|$ は実数．
写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ の体積拡大率が $\det A$.

## 定理 (定義と計算方法：余因子展開 石村畑 線形代数 p.65)

$A = (a_{ij})$ を $n$ 次の正方行列
$\tilde{a}_{ij}$ を $A$ の $(i,j)$ 余因子 とするとき，

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{i\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{\ell j}$. ($j$ 列目における余因子展開)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = +31 \begin{vmatrix} . & 12 & 13 & 14 \\ . & 22 & 23 & 24 \\ \bullet & . & . & . \\ . & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} - 32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 33 \begin{vmatrix} 11 & 12 & . & 14 \\ 21 & 22 & . & 24 \\ . & . & \bullet & . \\ 31 & 32 & . & 44 \end{vmatrix} - 34 \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & . \\ 21 & 22 & 23 & . \\ . & . & . & \bullet \\ 31 & 32 & 43 & . \end{vmatrix}$$

# 復習：行列式の性質

## 命題 (上三角・下三角行列の行列式の値 教科書に追加 線形代数☆演習 I(2025)L16)

上三角行列・下三角行列の行列式は，対角成分の積である

## 命題 (行列式がゼロになる十分条件 線形代数☆演習 I(2025)L19)

$A$ を $n$ 次正方行列とする．

- $A$ に，すべて $0$ である行があれば $|A| = 0$.
- $A$ の第 $i$ 行が，第 $j$ 行 $(i \neq j)$ の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら，$|A| = 0$
- $A$ に，すべて $0$ である列があれば $|A| = 0$.
- $A$ の第 $i$ 列が，第 $j$ 列 $(i \neq j)$ の $k \in \mathbb{R}$ 倍なら，$|A| = 0$

## 定理 (基本操作と行列式 石村畑 線形代数 p.80,p.81)

$A$ に次の基本操作をして得た行列を $B$ とする. $i \neq j$, $k \neq 0$.

$A \overset{(R*),(C*)}{\to} B$

| | 基本操作 | | 行列式 |
|---|---|---|---|
| 行基本操作 RIII(R3) | $(i) \leftrightarrow (j)$ | $\det A =$ | $(-1) \times \det B$ |
| 行基本操作 RI(R2) | $(i) \times k$ | $\det A =$ | $\frac{1}{k} \times \det B$ |
| 行基本操作 RII(R5) | $(i) + (j) \times a$ | $\det A =$ | $\det B$ |
| 列基本操作 CIII(C3) | $(i)' \leftrightarrow (j)'$ | $\det A =$ | $(-1) \times \det B$ |
| 列基本操作 CI(C2) | $(i)' \times k$ | $\det A =$ | $\frac{1}{k} \times \det B$ |
| 列基本操作 CII(C5) | $(i)' + (j)' \times a$ | $\det A =$ | $\det B$ |

## 行基本変形による行列式の計算

- $A$ を行基本変形で簡約階段化したとき単位行列になる $(\operatorname{rank} A = n)$ なら，係数 $\cdot \det E =$ 係数 $\cdot 1^n =$ 係数, が行列式の値.
- 行基本変形で，簡約階段化までしなくても，$A$ を上三角行列にできたら，係数 $\cdot$ 対角成分の積が行列式の値.
- $\operatorname{rank} A < n$ なら（例えば 0 だけの行が作れたら）$\det A = 0$.

L28-Q1

## Quiz(行列式)

行基本変形で階段行列に直すことにより，次の行列式を求めよう.

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行基本変形による，行列式計算のアルゴリズム

入力: $n$ 次正方行列 $A$，出力: 行列式
行列式を $=$ でつないで計算していく．定数倍がでたときはそれを記す．

- (逆行列を求めるのと同じ) 行基本変形で (簡約) 階段形にしていく
- 許される手抜き方法
  - ピボット ($0$ ではない) は $1$ にしてもしなくてもよい (簡約でなくてよい)
  - ピボットの上側の成分はゼロにしなくてよい (簡約でなくてよい)
  - ピボットのない列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - $0$ ばかりの行, 列, 定数倍の行, 列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - 上三角行列になった段階で終了
- 係数と，すべての対角成分の積を出力して終了

（慣れた人向け）余因子展開を使ったり，残りの右下ブロックが $2 \times 2$, $3 \times 3$ になったらサラスの公式を使ったりしてもよい．列基本変形を使ってもよい．

大注意 1 個の矢印に複数の操作: 逐次適用 (略記) はいいけど,
同時適用は間違った結果になる 線形代数☆演習 I(2025)L27

LearnMoodle 動画 行列式

# 復習：掃き出し法の概要 線形代数☆演習 I(2025)L21

段に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, RIII(R3) によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分 $c$ を RI(R2) ① $\times (1/c)$ で 1 にする
(4) RII(R5) ⓘ $+$ ① $\times (-a)$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の $a$ を零にする
(5) RII(R5) ⓘ $+$ ① $\times (-a)$ で, ブロックのその列の上側を零にする
* これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(5) を「再帰的に」行う
* 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

# 復習：掃き出し法 (簡略版)

線形代数☆演習 I(2025)L21

## 掃き出し法の概要 (簡略版)

行 $\textcircled{i}$ にあるピボットを右下に 1 行ずつ移動しながら，

1. なるべく近い，ゼロばかりでない列を相手にする
2. RIII(R3) 必要なら $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$ でゼロでない成分を行 $\textcircled{i}$ に持ってくる (ピボットにする)
3. RI(R2) 必要なら $\textcircled{i} \times \frac{1}{c}$ でピボットを 1 にする
4. RII(R5) $\textcircled{k} + \textcircled{i} \times (-a)$ でピボットの下ぜんぶをゼロにする
5. RII(R5) $\textcircled{k} + \textcircled{i} \times (-a)$ でピボットの上ぜんぶをゼロにする

# 簡約階段形や逆行列を求める 対 行列式を求める 石村畑 線形代数 p.114

| 求めるもの | 簡約階段形, 方程式の解, 逆行列 | 行列式の値 |
|---|---|---|
| 対象<br>つなぐもの<br>許される操作<br>ゴール<br>併用できる操作 | 行列 $\begin{pmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc\|cc}\bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 1\end{array}\right)$<br>$\rightarrow$<br>R のみ<br>簡約階段形 | 行列式 $\det\begin{pmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{vmatrix}$<br>$=$<br>R と C<br>(上) 三角行列<br>余因子展開, サラスの公式 $(3 \times 3)$, 行列式が 0 になる十分条件 |

線形代数 I を通過した人は, 区別して完璧に実行できるべき手順.
レポート方式の trialL27 の表裏で対比して確認します.

L28-Q2

## Quiz(行列式)

次の行列式 $\det(A)$ の値を，$A$ を行基本変形で上三角行列にすることにより（余因子展開やサラスの公式は使わないで）求めよう．各ステップで利用した行基本操作を ① $\leftrightarrow$ ② のように書こう．

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# ここまで来たよ

27 数式処理システム Maple

28 行基本変形による行列式の計算
- 行列式
- 対角行列の復習

# いまごろ対角行列の復習

## 定義 (対角行列 石村畑 線形代数 p.220 | 線形代数☆演習 I(2025)L07)

$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という.
対角成分でない成分が 0 である正方行列
$(1 \leq {}^{\forall} i, j \leq n \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ である正方行列 $A)$
を対角行列という.

## 命題 (対角行列の成分表示 教科書に追加 | 線形代数☆演習 I(2025)L09)

$n$ 次の対角行列 $D$ の成分 $d_{ij}$ は，対角成分 $\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$ (ラムダ) とクロネッカーのデルタ記号 $\delta$ を用いて，次のように書ける.

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

# 対角行列の積

## 命題 (対角行列の積 線形代数☆演習 I(2025)L07)

$n$ 次の対角行列 $A, B$ の対角成分をそれぞれ，$\lambda_i (i = 1, \dots, n)$, $\mu_i (i = 1, \dots, n)$ とする．
積 $AB, BA$ はまた $n$ 次の対角行列で，$AB = BA$ であり，対角成分は $\lambda_i \cdot \mu_i (i = 1, \dots, n)$.
べき乗 $A^n$ はまた $n$ 次の対角行列で，対角成分は… 石村畑 線形代数 p.49

$A$,$B$ の成分をそれぞれ $a_{ij}$, $b_{ij}$ とすると，

$$a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}, \quad b_{ij} = \mu_i \delta_{ij}$$

であり，$AB$ の $(i, j)$ 成分 $c_{ij}$ は，積の定義から，

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{ik} \mu_k \delta_{kj} \\ &= \lambda_i \delta_{ij} \mu_j = \lambda_i \mu_j \delta_{ij} = \lambda_i \mu_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

# 復習と再解釈：対角行列の行列式と逆行列

## 命題 (対角行列の行列式の値 教科書に追加 線形代数☆演習 I(2025)L16)

対角行列（実は上三角行列・下三角行列も）の行列式は，対角成分の積である

## 命題 (対角行列の正則性・逆行列 教科書に追加 線形代数☆演習 I(2025)L09)

$n$ 次の対角行列 $D$ の対角成分を $\lambda_i$ $(i = 1, \dots, n)$ とする．

- $\exists i$ s.t. $\lambda_i = 0 \Leftrightarrow D$ は正則でない
- $\forall i$ $\lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow D$ は正則である
  - このとき，$D^{-1}$ は $n$ 次の対角行列で対角成分は $1/\lambda_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

# 行列の成分表示による証明

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L29(2025-07-18 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-18 Fri 11:06 JST hig"

今日の目標

- 行列の成分表示による使った証明ができる **教科書に追加**

- 実数の等式 $|\ ::\ | = |\ ::\ | = \cdots =$ 行列式の値 で計算する.
- $1\times|\ ::\ |$ から始まるのは行基本変形計算機の都合なので，答案では $1\times$ は不要.
- 整数成分の行列式は，計算途中で分数が出てくることはあるが，最後は整数になるはず（余因子展開による定義を考えると）.
- （この手の行列では）成分 $0$ の誘惑に惑わされるより，掃き出し法を忠実に実行するほうが便利で速い.

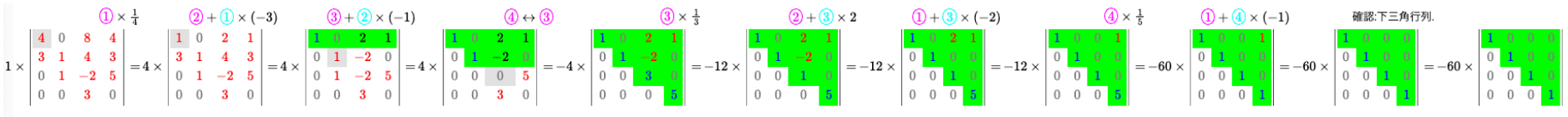
## L28-Q1

## Quiz 解答: 行列式

階段行列（この場合は上三角行列）にする場合

$$1\times\begin{vmatrix}4&0&8&4\\3&1&4&3\\0&1&-2&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{②+①\times(-\frac{3}{4})}{=}1\times\begin{vmatrix}4&0&8&4\\0&1&-2&0\\0&1&-2&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{③+②\times(-1)}{=}1\times\begin{vmatrix}4&0&8&4\\0&1&-2&0\\0&0&0&5\\0&0&3&0\end{vmatrix}\overset{④\leftrightarrow③}{=}-1\times\begin{vmatrix}4&0&8&4\\0&1&-2&0\\0&0&3&0\\0&0&0&5\end{vmatrix}\overset{\text{確認:階段行列.}}{=}-1\cdot4\cdot1\cdot3\cdot5=-60$$

簡約階段形までする場合 (Teams に拡大できる画像)




$= -60 \cdot 1^4 = -60$

L28-Q2

## Quiz 解答: 行列式

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{②\leftrightarrow③}{=} -\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{上三角行列}}{=} -1 \times 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = -60.$$

L28-Q3

## Quiz(行列式)

次の行列式 $\det A$ の値を，掃き出し法のアルゴリズムに従って $A$ を行基本変形で**簡約**階段行列にすることにより（余因子展開やサラスの公式は使わないで）求めよう．各ステップで利用した行基本操作を ① ↔ ② のように書こう．

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# ここまで来たよ

28 行基本変形による行列式の計算

29 行列の成分表示による証明
- 上下三角・対角行列
- 証明の書き方

# 上三角行列, 下三角行列, 対角行列 石村畑 線形代数 p.50,p.220,p.234

## 定義 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

$n$ 次正方行列 $A, B$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$,$b_{ij}$ とする.

- $A$ が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (\forall i,j\ i>j \Rightarrow a_{ij}=0)$
- $A$ が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (\forall i,j\ i<j \Rightarrow a_{ij}=0)$
- $A$ が対角行列 (diagonal matrix)
  $\Leftrightarrow (\forall i,j\ i\neq j \Rightarrow a_{ij}=0) \Leftrightarrow$「対角成分でない成分はゼロ」
- $A$ が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow (\forall i,j\ a_{ji}=a_{ij}) \Leftrightarrow {}^tA=A.$
- $A$ が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow (\forall i,j\ a_{ji}=-a_{ij}) \Leftrightarrow {}^tA=-A.$

## 定義 (転置行列 石村畑 線形代数 p.100)

$n$ 次正方行列 $A, B$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$ を $b_{ij}$ とする.
$B$ が $A$ の転置行列 $\Leftrightarrow {}^tA=B \Leftrightarrow (\forall i,j\ a_{ji}=b_{ij})$

$P \Leftrightarrow Q$: $P$ と $Q$ は同値, $Q$ は $P$ の必要十分条件, $P$ を $Q$ で定義する.
$P \Rightarrow Q$: $P$ ならば $Q$, $P$ は $Q$ の十分条件, $Q$ は $P$ の必要条件, $P$: 仮定, $Q$: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |

# 対角行列

## $n$ 次対角行列

具体的な表示

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$D$ の $(i,j)$ 成分を $d_{ij}$ とすると，クロネッカーのデルタを使って

$$d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} (= \lambda_j \delta_{ij})$$

$\lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ を対角成分という．
対角行列全体は，$n$ 次正方行列の中で，扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ)．

線形代数 II(後期)，代数 (3 年)

何か計算していて対角行列にできたらラッキー　対角化

線形代数 II(後期)

単位行列は，$\forall i\ \lambda_i = 1$ を満たす対角行列．

# ここまで来たよ

28 行基本変形による行列式の計算

29 行列の成分表示による証明
- 上下三角・対角行列
- 証明の書き方

L29-Q1

## Quiz(行列の証明)

$n(\geq 2)$ 次正方行列 $A$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$ とする．
$A$ が上三角行列なら，$A$ の $(2,1)$ 成分は $0$ であることを示そう．

# 証明「示そう」の書き方

「$P$ならば $R$」「$P$のとき $R$」を示す

仮定 $P$

結論 $R$
よって仮定 $P$ならば
結論 $R$

仮定 $P$
よって「仮定 $P$を定義で書き直したもの」

「結論 $R$ を定義で書き直したもの」
よって結論 $R$
よって仮定 $P$ならば
結論 $R$

仮定 $P$
よって「仮定 $P$を定義で書き直したもの」

**(ギャップを埋める)**

「結論 $R$ を定義で書き直したもの」
よって結論 $R$
よって仮定 $P$ならば
結論 $R$

L29-Q2

## Quiz(行列の証明)

$n$ 次正方行列 $A$ が対角行列ならば，$A$ は上三角行列であることを示そう．
「対角行列は上三角行列であることを示そう」

## $P$ ならば $R$ の証明

$P \Rightarrow R$

$P$ とする

$\vdots$

$\boxed{R}$

よって $P \Rightarrow R$.

## $P$ ならば $(Q$ ならば $R)$ の証明

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

$P$ とする

$\vdots$

$Q$ とする

$\vdots$

$R$

よって $Q \Rightarrow R$

よって $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

結局，$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには，
$(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.
つまり「仮定 $Q$ は前に持っていってていい」「$P$ と $Q$ から $R$ を示せばいい」

L29-Q3

## Quiz(三角行列の和)

$A, B$ が上三角行列ならば，和 $A + B$ も上三角行列であることを示そう．

L29-Q4

## Quiz(上三角行列と対角行列)

(任意の正方行列 $A$ に対して)，$A$ が上三角行列であるとき，$A$ は対角行列か？
「上三角行列は対角行列か？」

- 「$P$は成り立つか？」は，$P$ が成立するか $P$の否定が成立するかを考え，成立する方を証明する．
- 否定を示すには，「上三角行列であり，かつ対角行列でない行列が存在すること」を言う．
  - 「存在すること」を言うにはひとつ具体例を挙げる

# 「成り立たない」ことの証明

$Q \Rightarrow R$ が成り立たないことを示すには，$Q \Rightarrow R$ の否定を示す．
$Q \Rightarrow R$ の否定は「$Q$ である，かつ $R$ でない」

$\forall x\ P(x)$ の否定は $\exists x\ (P(x)$でない$)$.
$\exists x\ (P(x)$でない$)$ を示すには，実際に「$P(x)$ でない」$x$ の具体例をひとつ作ってみせればよい
このような $x$ を反例 (counter-example) という．

$\forall x\ Q(x) \Rightarrow R(x)$ の否定を示すには，
$Q(x)$ だけど $R(x)$ でない，実例 $x$ をひとつ作ってみせればよい．

# 定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

- 2025-07-30 水 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- TrialL01–L15 の出題計画をあわせたもの．要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし．ただし，災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2025-08-06).

## 成績評価

- TrialL29 は紙で対面
- TrialL30 は Moodle や Mobius（紙でなく解答して完了）
- (Trial 以外の)Mobius の問は mobius　IH4.8 が最後．2025-07-28 月 24:00 までを算入
- TrialL01–L15 の合計点と，上の小テストの点数を比較し，高いほうを採用します．Moodle「成績評価方法」参照.
- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2025-07-25 金までに LearnMoodle 欠席遅刻早退届 に提出.
- 2025-07-29 火に，すべての採点結果を公表することはできないかも

# 高次元のベクトル・行列とその応用

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L30(2025-07-23 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-23 Wed 07:20 JST hig"

今日の目標

- 行列の成分表示を使った証明ができる（続）
- 規則的な成分の行列の計算ができる
- ベクトルで表現できるものの例が挙げられる

L29-Q1

## Quiz 解答: 行列の証明

$A$ を上三角行列とする.

定義より，$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0 \cdots (*)$.

$i = 2, j = 1$ とすると，$i > j$ なので，(*) より，

$a_{21} = 0$.

$A$ の $(2, 1)$ 成分は $0$.

よって，$A$ が上三角行列なら，$A$ の $(2, 1)$ 成分は $0$ である.

L29-Q2

## Quiz 解答: 行列の証明

$A$ を対角行列とする.

$A$ の $(i, j)$ 成分を $a_{ij}$ とすると，$\forall i, j (i \neq j)\ a_{ij} = 0 \cdots (*)$

任意のペア $k > \ell$ とする．
このとき，$i = k, j = \ell$ として (*) を使うと，$k \neq \ell$ なので，
$a_{k\ell} = 0$.
よって，$\forall k, \ell (k > \ell) \Rightarrow a_{k\ell} = 0$.
よって，$A$ は上三角行列.

よって，$A$ が対角行列ならば，$A$ は上三角行列.

L29-Q3

TA Prob and Sol: 三角行列の和

$A, B$ が上三角行列ならば，和 $A + B$ も上三角行列であることを示そう．

略解

$A, B, C = A + B$ の $(i, j)$ 成分を $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ とする
$A, B$ を上三角行列とする．
よって $\forall i, j \quad i > j \Rightarrow a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$. (*)

任意の $k > \ell$ を考える．

$c_{k\ell} \overset{\text{行列の和の定義}}{=} a_{k\ell} + b_{k\ell}$.

ここで，$k = i, \ell = j$ として条件 *(*)* を使うと，

$c_{k\ell} \overset{\text{条件 (*)}}{=} 0 + 0 = 0.$

よって，$\forall k, l \quad k > \ell \Rightarrow c_{k\ell} = 0.$

よって，$C$ は上三角行列．

よって，$A, B$ が上三角行列なら，$A + B$ は上三角行列．

L29-Q4

Quiz 解答: 上三角行列と対角行列

そうとは限らない．反例 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ の $(1, 2)$ 成分は，$1 \neq 2$ だが $3 \neq 0$ であり，対角行列の定義を満たさない．

# ここまで来たよ

29 行列の成分表示による証明

30 高次元のベクトル・行列とその応用
- 多次元のベクトルと行列の計算
- 行列の積と証明
- ベクトル・マトリクス・テンソル
- 埋込み embedding

L30-Q1

## Quiz(高次元の行列)

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ の第 $i$ 成分を $v_\ell$, $n$ 次正方行列の $A$ の $(\ell, m)$ 成分を $a_{\ell m}$ とする．
ベクトル $v_\ell = 2^\ell$, 行列 $a_{\ell m} = \ell \cdot 3^m$ を考える．

1. $n = 3$ とする．ベクトル $v_\ell$, 行列 $a_{\ell m}$ を成分表示で具体的に書こう．積 $A\vec{v}$ を求めよう．
2. 一般の $n$ に対して，積 $\vec{u} = A\vec{v}$ の成分 $u_\ell$ を求めよう．

## 有限等比級数の和

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

$v_\ell$ というより関数 $v_x = v(x)$. 関数もベクトルと思える.
行列 $a_{\ell m}$ というより 2 変数関数 $a_{xy} = a(x, y)$,
積というより積分変換 $u(x) = \int a(x, y)v(y)\mathrm{d}y$ と言ったほうがいいな〜

微積分 II

フーリエ解析

L30-Q2

## Quiz(高次元の行列)

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ の第 $i$ 成分を $v_\ell$, $n$ 次正方行列の $A$ の $(\ell, m)$ 成分を $a_{\ell m}$ とする．
ベクトル $v_\ell = \mathrm{e}^{-4\ell}$, 行列 $a_{\ell m} = \ell + \mathrm{e}^{2m}$ を考える．

1. $n = 3$ とする．ベクトル $v_\ell$, 行列 $a_{\ell m}$ を成分表示で具体的に書こう．積 $A\vec{v}$ を求めよう．
2. 一般の $n$ に対して，積 $\vec{u} = A\vec{v}$ の成分 $u_\ell$ を求めよう．

# ここまで来たよ

29 行列の成分表示による証明

30 高次元のベクトル・行列とその応用
- 多次元のベクトルと行列の計算
- 行列の積と証明
- ベクトル・マトリクス・テンソル
- 埋込み embedding

L30-Q3

## TA Prob and Sol: 上三角行列と対角行列

$A, B$ が $n$ 次の上三角行列ならば, 積 $AB$ も $n$ 次の上三角行列か？

### 略解

成り立つ.

まず，$n$ 次正方行列の積 $C = AB$ はまた $n$ 次正方行列である.

$A, B, C$ の $(i, j)$ 成分を $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$ とする.

仮定より，$A, B$ は上三角行列である.

すなわち，$\forall i, j \qquad i > j \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} = 0$ (*)

$\ell > m$ とする (**)
行列の積の定義より

$$\begin{aligned} c_{\ell m} &= \sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} b_{k m} \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} a_{\ell k} b_{k m} + \sum_{k=\ell}^{n} a_{\ell k} b_{k m} \\ &= (a_{\ell 1} b_{1 m} + \cdots + a_{\ell \ell-1} b_{\ell-1 m}) + (a_{\ell \ell} b_{\ell m} + \cdots + a_{\ell n} b_{n m}). \end{aligned}$$

第 1 項に含まれる $a_{\ell k} b_{k m}$ は $\ell > k$. (*) より $a_{\ell k} = 0$.
第 2 項に含まれる $a_{\ell k} b_{k m}$ は $k \geq \ell$. $\ell > m$(**) より $k > m$ で，
(*) より $b_{k m} = 0$.
よって $\ell > m$ ならば，$c_{\ell m} = \sum_{k=1}^{\ell-1} a_{\ell k} \cdot 0 + \sum_{k=\ell}^{n} 0 \cdot b_{k m} = 0$.
すなわち，$\forall \ell, m \quad \ell > m \Rightarrow c_{\ell m} = 0$.
定義より，$C$ は上三角行列である．

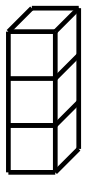
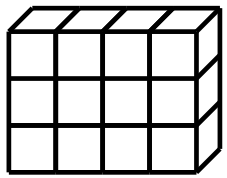
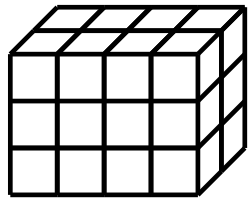
よって，$A, B$ が上三角行列なら $AB$ も上三角行列．

# ここまで来たよ

29 行列の成分表示による証明

30 高次元のベクトル・行列とその応用
- 多次元のベクトルと行列の計算
- 行列の積と証明
- ベクトル・マトリクス・テンソル
- 埋込み embedding

# ベクトル・行列・テンソル

| $\vec{v} = (v_i)$ 3 次元縦ベクトル | $A = (a_{ij})$ $3 \times 4$ 行列 | $T = (T_{ijk})$ 3 階の $3 \times 4 \times 2$ テンソル | $T = (T_{ijkh})$ 4 階の $3 \times 4 \times 2 \times 10$ テンソル |
|---|---|---|---|
|  |  |  | ? |
| ベクトル (vector) ‘行くもの’ 例: 部屋の明暗の時間変化データ. 3=時間の長さ. | 行列 (matrix) ‘母体’ ‘土台’ ‘母型’ ‘活字’ 白黒グレースケール画像. 縦横 3x4 ドット. | テンソル (tensor) ‘張力’ RGB 画像 | 4 階のテンソル RGB 動画 |

- 工学では, matrix といえば 縦横のあるもの, のイメージの方が強くなった
- ベクトルは 1 階のテンソル, 行列は 2 階のテンソル (まあ), 3 階以上はぜんぶテンソル
- どれもプログラム上では (多次元) 配列 array で表現される.

## 一般相対性理論のアインシュタイン方程式

$g_{\mu\nu}$ 計量テンソル, $R_{\mu\nu}$ リッチテンソル, $T_{\mu\nu}$ エネルギー運動量テンソル

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

# ここまで来たよ

29 行列の成分表示による証明

30 高次元のベクトル・行列とその応用
- 多次元のベクトルと行列の計算
- 行列の積と証明
- ベクトル・マトリクス・テンソル
- 埋込み embedding

# 文字列のベクトル表現

文字 (キャラクタ) には通し番号が振られている (文字コード) 情報処理システム I

'a'=97, 'b'=98, 'c'=99, 'd'=100, ...

文字列 dogs□run は $\begin{pmatrix} \mathrm{d} \\ \mathrm{o} \\ \mathrm{g} \\ \mathrm{s} \\ \square \\ \mathrm{r} \\ \mathrm{u} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 111 \\ 103 \\ 115 \\ 32 \\ 114 \\ 117 \\ 110 \end{pmatrix}$ というベクトルで表される.

1 文字の文字列のベクトルは，長さが違うだけ. 'a' と'b' は, 'a' と'c' より近い？

# 意味を考慮した文字列のベクトル表現

## one-hot vector

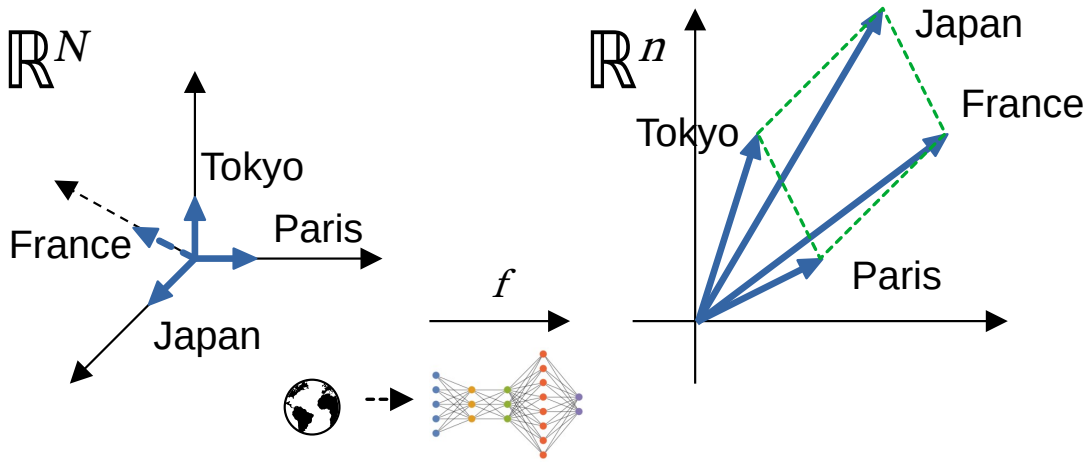
単語ベクトル $\in \mathbb{R}^N$, $N$: 辞書に載ってる単語の個数.
単語に該当する成分だけ 1, 他は 0 にする.
各単語の意味を「独立」と考えてる. 長さ不使用.

$$\vec{v}_{\text{dogs}} = \begin{matrix} 1) \\ \\ 1253) \\ \\ N) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_{\text{run}} = \begin{matrix} 1) \\ \\ 4858) \\ \\ N) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1253, 4858 は，dogs, run の単語番号（辞書の 1253 番目に現れる).

# 埋込み embedding

もっと低次元の $\mathbb{R}^n, n = 1000$ くらい？ で扱いたい． 次元圧縮 (機械学習)
意味を反映したベクトルの配置にしたい．
ニューラルネットワークに世の中のテキストを学習させた，いい感じの（線形でない）埋込み写像 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$




こうして作った $f$ には，
$\vec{v}_{\text{Paris}} - \vec{v}_{\text{Tokyo}} = \vec{v}_{\text{France}} - \vec{v}_{\text{Japan}}$
のようないい性質を持たせられる．ニューラル自然言語処理

# 今後使われる線形代数

- 1 年後期
  - 線形代数及び演習 II より抽象的に, より広い適用範囲
  - 微積分及び演習 II 2 変数関数 $y = f(x_1, x_2)$ の偏微分 $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, テイラー展開, 置換積分
  - データ分析 表=行列に記録された数値データの扱い
  - プログラミング及び実習 III (多次元) 配列はベクトル・行列・テンソル
- 2 年前期
  - 数値計算法及び実習 (の一部) 行列のアルゴリズムを自分でプログラムとして書こう
- 2 年後期
  - フーリエ解析及び演習 関数をベクトル，変換を行列を思おう
  - 多変量解析及び演習 ‘ベクトルの確率’, ‘その標本である行列’
- 3 年前期
  - 機械学習 I,II ニューラルネットワークのテンソルによる表現
- 3 年後期
  - 微分幾何入門曲面の曲がり具合を表現するリーマン曲率 (4 階) テンソル $R^h_{kji}$

# 定期試験期間中の任意参加授業内小テスト

- 2025-07-30 水 09:15-10:15, 1-107, 参照なし (すべて持込不可).
- TrialL01–L15 の出題計画をあわせたもの．要学生証, 個人別座席指定.
- 事前の出欠連絡不要.
- 理由を問わず, 欠席したときの追試や配慮はなし．ただし，災害や交通機関などにより全学的に定期試験が延期になるときは同様に延期 (2025-08-06).

## 成績評価

- TrialL30 は Moodle や Mobius（紙でなく解答して完了）
- trialL30-1 Mobius の Trial で. 期限 2025-07-28 月 23:59
- trialL30-2 Moodle 作文 期限 2025-07-30 水 20:00
- アンケートと学習履歴分析への同意をお願いします
- (Trial 以外の)Mobius の問は mobius IH4.8 が最後．2025-07-28 月 23:59 までを算入
- TrialL01–L15 の合計点と，上の小テストの点数を比較し，高いほうを採用します．LearnMoodle 成績評価方法参照.
- 考慮対象になるかもしれない欠席の届は 2025-07-28 月 23:59 までに LearnMoodle 欠席遅刻早退届 に提出.
- 2025-07-29 火に，すべての採点結果を公表することはできないかも

教科書は (少なくとも) 卒業まで売らないで
2025 年度後期金 3 数理情報基礎演習，2026 年度前期 確率統計 I でお会いしましょう（たぶん）

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

# 線形代数☆演習 I L31(2025-07-23 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-07-23 Wed 06:54 JST hig"

## 今日の目標



L30-Q1

## Quiz 解答: 高次元の行列

1. $\ell, m = 1, 2, 3$ で考えて,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1\cdot 3^1 & 1\cdot 3^2 & 1\cdot 3^3 \\ 2\cdot 3^1 & 2\cdot 3^2 & 2\cdot 3^3 \\ 3\cdot 3^1 & 3\cdot 3^2 & 3\cdot 3^3 \end{pmatrix}. \quad A\vec{v} = \begin{pmatrix} 258 \\ 516 \\ 774 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} v_k &= \sum_{k=1}^{n} \ell 3^k 2^k \\ &= \ell \sum_{k=1}^{n} 6^k \\ &= \ell \frac{6(1-6^n)}{1-6} \end{aligned}$$

L30-Q2

## Quiz 解答: 高次元の行列

1. $\ell, m = 1, 2, 3$ で考えて,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-4} \\ \mathrm{e}^{-8} \\ \mathrm{e}^{-12} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{e}^{2} & 1+\mathrm{e}^{4} & 1+\mathrm{e}^{6} \\ 2+\mathrm{e}^{2} & 2+\mathrm{e}^{4} & 2+\mathrm{e}^{6} \\ 3+\mathrm{e}^{2} & 3+\mathrm{e}^{4} & 3+\mathrm{e}^{6} \end{pmatrix}. \quad A\vec{v} = (\mathrm{e}^{-4}+\mathrm{e}^{-8}+\mathrm{e}^{-12}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (\mathrm{e}^{-2}$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} v_k &= \sum_{k=1}^{n} (\ell + \mathrm{e}^{2k}) \mathrm{e}^{-4k} \\ &= \ell \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-4k} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{-2})^k \\ &= \ell \frac{\mathrm{e}^{-4}(1 - \mathrm{e}^{-4n})}{1 - \mathrm{e}^{-4}} + \frac{\mathrm{e}^{-2}(1 - \mathrm{e}^{-2n})}{1 - \mathrm{e}^{-2}} \end{aligned}$$