

ベクトルの成分表示

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L02(2025-04-11 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-11 Fri 07:46 JST hig"

今日の目標

- 成分でベクトルの演算を行える
- Mobius の数式入力で学習できる
- LearnMoodle で学習できる

石村畑 線形代数 §1.1.2



Moodle

<https://hig3.net>



→ LearnMoodle <https://learn.hig3.net>

→ 'Google account Ryukoku' に y25....@mail.ryukoku.ac.jp でログイン

→ 線形代数☆演習 (2025)

Moodle は Manaba の仲間. LMS=Learning Management System. 世界的には高等教育では Moodle のシェアが大きい.

ここまで来たよ

① ベクトルの演算

② ベクトルの成分表示

- ベクトルの成分表示と演算

ベクトルの表示

石村畑 線形代数 §1.1.2

ベクトルの始点を原点におく.

平面ベクトルを, 終点の x, y 座標を使って, $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = (2, 5)$ のように書く. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ のように書くこともある (教科書に追加 縦ベクトル,

石村畑 線形代数 p.152

列ベクトル)

石村畑 線形代数 p.6

空間ベクトルを, 終点の x, y, z 座標を使って, $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = (3, 2, 5)$ のように書く. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ のように書くこともある (教科書に追加 縦ベクトル,

石村畑 線形代数 p.152

列ベクトル)

石村畑 線形代数 p.7

Mobius ではベクトル $(,)$ のコンマ $,$ が表示されないことがあります. 自分が入力するときは常に必要です.

単位ベクトル 教科書に追加

定義 (単位ベクトル 教科書に追加)

ベクトル $\vec{a}$ が $|\vec{a}| = 1$ であるとき, $\vec{a}$ は単位ベクトルであるという.

命題 (平行な単位ベクトルの求め方 教科書に追加)

ベクトル $\vec{a} \neq \vec{0}$ に対して, $\vec{a}$ に平行な単位ベクトルは $\pm \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ である.
特に, 同じ向きの単位ベクトルが $+\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$, 逆向きの単位ベクトルが $-\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ である.

証明 ...

直観的説明 ...

3次元の座標系と基本ベクトル

教科書に追加

定義 (基本ベクトル)

教科書に追加

平面ベクトル

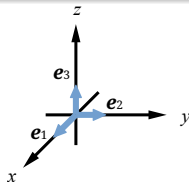
$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x = (1, 0), \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_y = (0, 1)$$

を2次元の**基本ベクトル**という.

空間ベクトル

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_y = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

を3次元の**基本ベクトル**という.



右手系

x 軸は手前向け

命題 (基本ベクトルの性質)

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

基本ベクトルは座標軸に平行な単位ベクトルである

定義 (クロネッカーのデルタ記号 教科書に追加)

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{定義}}{=} \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

‘同じなら 1, 違ったら 0’

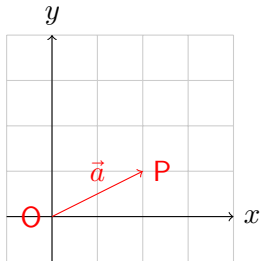
ベクトルの演算の成分表示

命題 (ベクトルの演算の成分表示 石村畑 線形代数 p.6,p.7)

石村畑 線形代数 p.6,p.7 参照

始点を O , 終点を P とする矢印を, ベクトル $\overrightarrow{OP}$ という.
平行移動して重なるベクトルは同じ.

例えば $R(2, 5)$, $S(4, 6)$, なら,
 $\overrightarrow{RS} = \vec{a} = (2, 1)$ 2 が x 成分, 1 が y 成分.



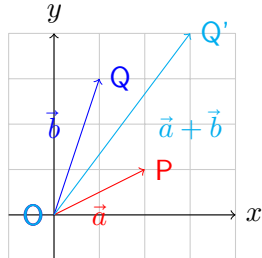
ベクトルの和

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP} = (2, 1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ'} = (1, 3)$$

のとき、ベクトルの和 $\vec{a} + \vec{b}$ は

OP, OQ を 2 辺とする平行四辺形
 を作って、もう 1 個の頂点を Q' と
 すると、 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OQ'}$



$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 1) + (1, 3) = (3, 4).$$

3, 4, 5, ... 次元ベクトルでも成分ごとに加える.

ベクトルの定数倍

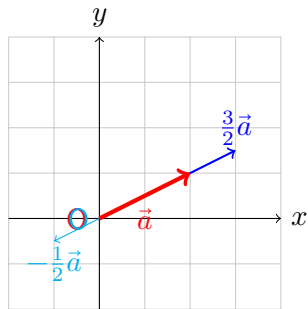
$\vec{a} = \overrightarrow{OP} = (2, 1)$, 実数 $k = 3$ に対して, ベクトルの定数倍 $k\vec{a}$ は
長さが $\vec{a}$ の長さの $|k|$ 倍のベクトルで,

$k > 0$ なら $\vec{a}$ と同じ向き, $k < 0$ なら $\vec{a}$ と逆向き (反対向き),

$k = 0$ ならゼロベクトル $k\vec{a} = \vec{0} = (0, 0)$.

$$k\vec{a} = k(2, 1) = (2 \cdot k, 1 \cdot k).$$

3, 4, 5, ... 次元ベクトルでも成分ごとに k 倍する.



命題 (内積の成分表示 石村畑 線形代数 p.7)

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

証明

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 \vec{e}_1 \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) + a_2 \vec{e}_2 \cdot (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2) \\ &= a_1 b_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + a_2 b_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + a_2 b_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \\ &= a_1 b_1 + 0 + 0 + a_2 b_2. \end{aligned}$$

L02-Q1

Quiz(ベクトルの内積)

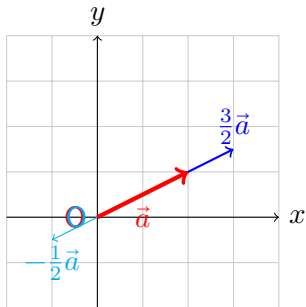
$\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (30, 10)$ とする.

- ① 内積 $\vec{a} \cdot \vec{a}$ を求めよう.
- ② 絶対値 $|\vec{b}|$ を求めよう.
- ③ 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよう.
- ④ 内積 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$ を求めよう.

ベクトルの平行

$\vec{a}$ と $\vec{b} (\neq \vec{0})$ に対して,
 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\theta = 0$ (同じ向き)
 または $\theta = \pi$ (逆向き) である
 とき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であるという.

ある実数 k が存在して
 $k\vec{a} = \vec{b}$ とかけることをいう.
 $\vec{a}, \vec{b}$ は, $k > 0$ なら同じ向き, $k < 0$
 なら逆(の)向きという.



ベクトルの直交

石村畑 線形代数 §6.1(p.200)

$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 θ が $\pi/2$ であるとき,
または, $\vec{a} = \vec{0}$ または, $\vec{b} = \vec{0}$ のと
き, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交するという.
垂直との違いは?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交する
という.