

# 空間ベクトルの外積

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L03(2025-04-16 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-16 Wed 13:32 JST hig"

## 今日の目標

- **教科書に追加** 3次元のベクトルの外積が計算できて利用できる
- **石村畑 線形代数 定理 1.1.1** 2辺のベクトルから三角形，平行四辺形の面積が計算できる



## L02-Q1

## Quiz 解答: ベクトルの内積

- ①  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 5.$
- ②  $|\vec{b}| = (\vec{b} \cdot \vec{b})^{1/2} = 1000^{1/2} = 10\sqrt{10}.$
- ③  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 30 + (-2) \cdot 10 = 10.$
- ④  $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 10 + 10 = 20.$

## 三角形の面積

定理 (三角形の面積 石村畑 線形代数 定理 1.1.1(p.6))

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  を 2 辺とする三角形 OAB の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2)^{1/2}.$$

2,3 次元で成立する.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  を 2 辺とする平行四辺形 OABP の面積  $S'$  は

$$S' = 2S = (|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2)^{1/2}.$$

## ここまで来たよ

### 2 ベクトルの成分表示

### 3 空間ベクトルの外積

- 3次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

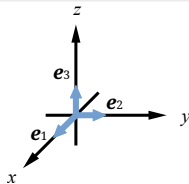
## 3次元の座標系と基本ベクトル (復習)

### 定義 (基本ベクトル)

3次元の

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = \vec{e}_y = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

の3つの単位ベクトルを**基本ベクトル**という。



**右手系**

$x$  軸は手前向け

$x$ : 親指,  $y$ : 人差し指,  $z$ : 中指

## 3次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

### 定義 (外積)

2つの3次元ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  に対して、次の式で表わされるベクトル  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  のことを**外積**という.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

この記号 '×' は新しい記号. (実数の 'かける' とたまたま同じ文字).

1成分覚えれば、あとは、1, 2, 3 つまり  $x, y, z$  が**循環的** (cyclic) に入れ替わってることに注意.

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .



## 基本ベクトルを使った別の書き方

$$\begin{aligned}
 & (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\
 & \stackrel{!}{=} (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3
 \end{aligned}$$

例  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3.$

## 外積の成分表示の覚え方

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & & \\
 a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\
 b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2
 \end{array}$$

## L03-Q1

## Quiz(3次元ベクトルの外積)

- ① 外積  $(1, 3, -2) \times (-6, 4, -5)$  を求めよう.
- ② 外積  $(-6, 4, -5) \times (1, 3, -2)$  を求めよう.
- ③ 外積  $(-6, 4, -5) \times (-6, 4, -5)$  を求めよう.

mobius IH1.5

## 命題 (外積の性質 (石村畑 線形代数 内積の性質 (p.5) と対照して))

ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  と実数  $k$  に対して, 次の性質が成り立つ.

- ① **大注意**  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ , よって  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- ② 分配法則  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ ,  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ .
- ③  $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$ .

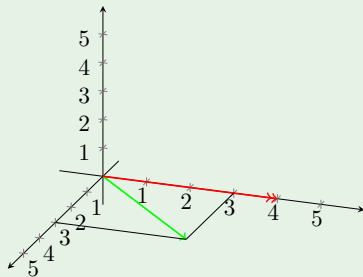
$$\text{計算例 } (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0} - \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

## L03-Q2

## Quiz(3次元ベクトルの外積)

図で、左向きが  $x$ , 右向きが  $y$ , 上向きが  $z$  軸で,  $xyz$  座標は右手系である. 緑のベクトルを  $\vec{a}$ , 赤のベクトルを  $\vec{b}$  とする.

外積  $\vec{a} \times \vec{b}$  を, (1) 定義にしたがった成分計算で (2) 絶対値と向きの性質から, 求めて図に描こう.

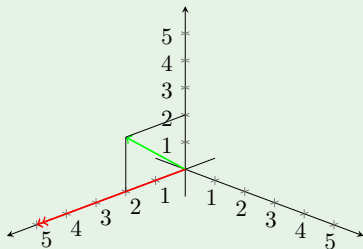


## L03-Q3

## Quiz(3次元ベクトルの外積)

図で、左向きが  $x$ 、右向きが  $y$ 、上向きが  $z$  軸で、 $xyz$  座標は右手系である。緑のベクトルを  $\vec{a}$ 、赤のベクトルを  $\vec{b}$  とする。

外積  $\vec{a} \times \vec{b}$  を、(1) 定義にしたがった成分計算で (2) 絶対値と向きの性質から、求めて図に描こう。



## 外積の性質

### 外積の絶対値

絶対値は、 $\vec{a}, \vec{b}$  を2辺とする平行四辺形の面積

なぜなら、

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= \cdots = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

## 外積の向き

$\vec{a} \times \vec{b}$  は,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  ととも直交する

なぜなら,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = 0.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0.$$

向きは2つあるけど, どちら向き?  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$  から, 右手で,

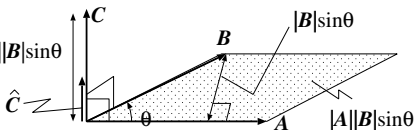
$\overrightarrow{\text{親指}} \times \overrightarrow{\text{人差指}} = \overrightarrow{\text{中指}}$ .

## 外積の図形的な意味

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| (\sin \theta) \vec{e}_c$$

ただし,  $\vec{e}_c$  は,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の両方に垂直な単位ベクトルで,  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{e}_c \rangle$  が右手系をなす ( 右手の形  $\langle$  親指, 人差指, 中指  $\rangle = \langle \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \rangle$  を  $\pi$  を越えて開かず  
に得られる) もの.

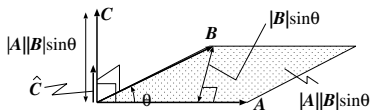
別の言い方  $\vec{c}$  の向きは,  $\vec{a}$  から  $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$   
 $\vec{b}$  に回る右ねじが進む向き.



## 外積ってけっきょく何?

$\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のはった網みたいなもの

- 2本の棒  $\vec{a}, \vec{b}$  を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり 平行四辺形の面積 が  $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ . 2本の棒が  
違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- 剛体の力学のトルク=力のモーメント  $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$ .
- 電磁気学のフレミングの左手の法則  $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$ .



## L03-Q4

## Quiz(3次元ベクトルの外積・スカラー3重積)

あまり柔軟性のない人が、片方の手を空中に差し出したところ、手のひらから

- 親指に向かうベクトルが  $(1, 2, 1)$
- 人差し指に向かうベクトルが  $(3, -2, 0)$
- 中指に向かうベクトルが  $(-1, -2, 3)$

だった.

この手は右手か左手か.