

空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L04(2025-04-18 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-18 Fri 07:34 JST hig"

今日の目標

- **教科書に追加** 3次元のベクトルのスカラー 3 重積が計算できて利用できる
- **教科書に追加** 平行四辺形の面積, 平行六面体の体積を計算できる
- **教科書に追加** 外積, スカラー 3 重積の図形的意味を説明で



L03-Q1

Quiz 解答:3次元ベクトルの外積

- ① $(1, 3, -2) \times (-6, 4, -5) =$
 $(3 \cdot (-5) - 4 \cdot (-2), -2 \cdot (-6) - (-5) \cdot 1, 1 \cdot 4 + (-6) \cdot 3) = (-7, 17, 22).$
- ② $-(-7, 17, 22).$
- ③ $\vec{0}.$

L03-Q2

Quiz 解答:3次元ベクトルの外積

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 12)$$

L03-Q3

Quiz 解答:3次元ベクトルの外積

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 10, 0)$$

ここまで来たよ

3 空間ベクトルの外積

4 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味

- 外積の応用
- スカラー 3 重積

L04-Q1

Quiz(2つのベクトルに垂直なベクトル)

2つのベクトル $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (12, -8, 0)$ を考える.

- ① $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直なベクトルを 1 つ求めよう.
- ② $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{c}$ をすべて求めよう.
- ③ 上で求めた単位ベクトル $\vec{c}$ について, $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ は右手, 左手のどちらの親指, 人差し指, 中指に重ねられるか答えよう.

L04-Q2

Quiz(3次元ベクトルの外積・スカラー3重積)

あまり柔軟性のない人が、片方の手を空中に差し出したところ、手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $(1, 2, 1)$
- 人差し指に向かうベクトルが $(3, -2, 0)$
- 中指に向かうベクトルが $(-1, -2, 3)$

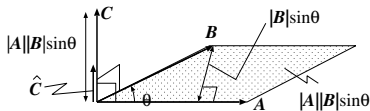
だった.

この手は右手か左手か.

外積ってけっきょく何?

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のはった網みたいなもの

- 2本の棒 $\vec{a}, \vec{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり 平行四辺形の面積 が $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$. 2本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- 剛体の力学のトルク=力のモーメント $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$.



ここまで来たよ

3 空間ベクトルの外積

4 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味

- 外積の応用
- スカラー 3 重積

スカラー 3 重積

ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ など.

対比して, 1 個の実数 k をスカラーという. 絶対値 $|\vec{a}|$ はスカラー.

外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ はベクトル.

ということは, 内積 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

定義 (スカラー 3 重積 教科書に追加)

空間ベクトルの順序付きの 3 個組 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して,

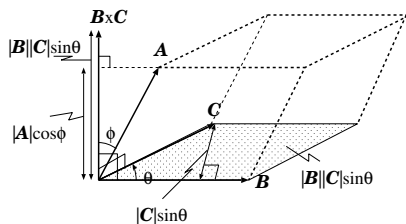
実数 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

を **スカラー 3 重積** という.

($|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ とにかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)

図形的に考えると、スカラー三重積は、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を 3 辺とする **平行六面体** の体積.

$$\begin{aligned}
 \text{高さ} \times \text{底面積} &= |\vec{a} \cos \phi| \times |\vec{b} \times \vec{c}| \\
 &= |\vec{a} \cos \phi| \times |\vec{b} \times \vec{c}| \\
 &= |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|
 \end{aligned}$$



スカラー 3 重積の筆算

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \cdots \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

L04-Q3

Quiz(内積・外積・スカラー 3 重積)

ベクトル $\vec{a} = (0, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 3, 0)$, $\vec{c} = (1, -2, 3)$ を考える.

- ① $\vec{b}, \vec{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を, 外積で求めよう.
- ② $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を, スカラー 3 重積で求めよう.

L04-Q4

Quiz(ベクトルとスカラーの演算)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を 3 次元ベクトル, k をスカラー (ふつうの 1 個の実数のこと) とする.

次の式 (の計算結果) を, スカラー, 3 次元ベクトル, 間違った式に分類しよう.

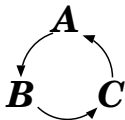
- ① $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$
- ② $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- ③ $(\vec{a} \cdot k) \times \vec{b}$
- ④ $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot k\vec{c}$
- ⑤ $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$

スカラー・ベクトルに対する演算

		空白	・	×
スス	$k?m$			
スベ	$k?\vec{a}$			
ベベ	$\vec{a}?\vec{b}$			

右手系左手系

体積だから、絶対値 $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$ は、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の順序を変更しても等しい。
 じゃあ絶対値を取る前の符号は等しい？
 実は、順序を循環的に変えたときは $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ の符号も同じ。



1つのベクトルを逆向きにしたり、ベクトルの順序を1ペア入れ替えたりすると、符号が逆になる。

右手の指で言うと、**中** $\cdot$ (**親** $\times$ **人**) > 0 。

右手系の座標系では $\vec{e}_z \cdot (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) > 0$ 。

符号つき体積

行列式 石村畑 線形代数 §3

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -1 \times (-\vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -1 \times \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$

定義

空間ベクトルの，順序付きの組 $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ が右手系とは， $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を右手の親，人，中指に重ねられることをいう．左手系とは…

命題

空間ベクトルの，順序付きの組 $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ は，線形独立 石村畑 線形代数 p.13 ならば，右手系，左手系のいずれか一方に分類される．

命題

空間ベクトルの，順序付きの組 $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ は，線形独立 石村畑 線形代数 p.13 ならば， $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ である． $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$ ならば右手系， $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) < 0$ ならば左手系である．