

直線のパラメタ表示とベクトル方程式

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L05(2025-04-23 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-23 Wed 13:01 JST hig"

今日の目標

- 石村畑 線形代数 §1.3 平面上の直線のパラメタ表示, 法線によるベクトル方程式が書ける
- 教科書に追加 平面ベクトルに垂直なベクトルが求められる
- 教科書に追加 点が直線上にあるかを判定できる



L04-Q1

Quiz 解答:2つのベクトルに垂直なベクトル

$$\textcircled{1} \quad \vec{d} = \vec{a} \times \frac{1}{4}\vec{b} = (2, 3, -8).$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{c} = \pm \frac{1}{|\vec{d}|}\vec{d} = pm \frac{1}{\sqrt{77}}(2, 3, -8).$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{77}}(2, 3, -8) \text{ は, 外積 } \vec{a} \times \vec{b} \text{ と同じ向きなので, 外積の向きの性質より, 右手の中指に重ねられる.}$$

$$\vec{c} = -\frac{1}{\sqrt{77}}(2, 3, -8) \text{ は, 外積 } \vec{a} \times \vec{b} \text{ と逆向きなので, 左手の中指に重ねられる.}$$

L04-Q2

Quiz 解答: 3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積 右手の中指の理想的な (親指人差し指と直交する) 向きは, $(1, 2, 1) \times (3, -2, 0) = (2, 3, -8)$. 右手だとする. このとき, 上で求めた向きと, 問題文の実際の右手中指の向きのなす角は $\frac{\pi}{2}$ 未満であるはず.

しかし, 内積 $(2, 3, -8) \cdot (-1, -2, 3) < 0$ なので, 矛盾. よって左手.

L04-Q3

Quiz 解答: 内積・外積・スカラー 3 重積

① $\vec{b} \times \vec{c} = (9, -3, -5)$. 面積は $|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{115}$.

② $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -18$. 体積は $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 18$.

emark 内積・, 外積・の記号を正しく使い分けよう.

emark 数学では, $=$ は, 両辺が等しいという記号で, 「次に」のような記号ではない.

$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |0 \cdot 9 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5)| = |-18| = 18$ はよいが,
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = |0 \cdot 9 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5)| = |-18| = 18$ のように途中で絶対値記号を加筆したものは誤り. 最初の等号が成立していない.

L04-Q4

Quiz 解答: ベクトルとスカラーの演算

- ① へん
- ② スカラー
- ③ ベクトル
- ④ スカラー
- ⑤ ベクトル

ここまで来たよ

④ 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味

⑤ 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

- 位置ベクトル
- 直線のパラメタ表示と方程式

位置ベクトル

石村畑 線形代数 §1.2

定義 (位置ベクトル)

石村畑 線形代数 §1.2

平面または空間で、原点 O を固定すると、点 A とベクトル $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ が 1 対 1 に対応する. ベクトル $\vec{a}$ を 点 A の位置ベクトルという.

点 A のかわりにベクトル $\vec{a}$ の言葉で記述することがある.

平行四辺形の面積 線形代数☆演習 I(2025)L03, 平行六面体の体積 線形代数☆演習 I(2025)L04 は, すでにそういうのりで話してた.

内分点外分点

命題 (内分, 外分 石村畑 線形代数 p.12,p.13)

2点 A, B の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ とする.

辺 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルは,

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n},$$

辺 AB を $k:(1-k)$ に内分する点 P の位置ベクトルは,

$$\vec{p} = (1-k)\vec{a} + k\vec{b}.$$

辺 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルは,

$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}.$$

いくつかの憶え方, $k = \frac{m}{m+n}$. $k = 0, 1$.

ここまで来たよ

④ 空間ベクトルのスカラー 3 重積とその意味

⑤ 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

- 位置ベクトル
- 直線のパラメタ表示と方程式

平面内の直線のパラメタ表示

石村畑 線形代数 p.16

$\vec{a}$ を通り $\vec{d} (\neq \vec{0})$ に平行な直線のパラメタ表示

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$$

$$\text{すなわち } \vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad (t \in \mathbb{R} \text{ はパラメタ})$$

$\vec{d}$ を直線の方向ベクトル 石村畑 線形代数 p.16, 接(線)ベクトル 教科書に追加 という.

- 理由: チェック 1 $\vec{a}$ を通る
- 理由: チェック 2 $\vec{d}$ に平行である

「動点」 $\vec{p}$ の変数名として, $\vec{r}$ (特に物理), $\vec{x} = (x, y)$ もよく使われる.
 $\vec{p} = (x, y), \vec{d} = (d_1, d_2), \vec{a} = (a_1, a_2)$ として成分で書くと,

$$x = a_1 + d_1 t$$

$$y = a_2 + d_2 t$$

パラメタ表示とは

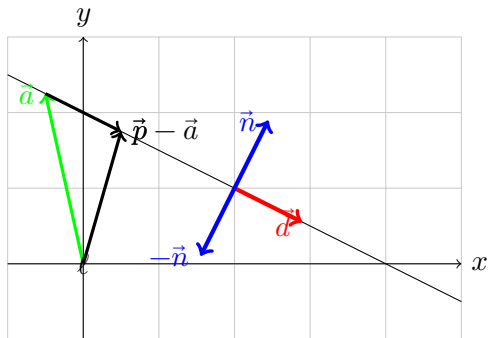
$$\text{直線上の点の集合} = \{\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$$

$\vec{a}, \vec{d}$ を固定して, t を実数全体を動かしたとき, $\vec{a} + t\vec{d}$ は直線全体を動く.
このとき, $\vec{a} + t\vec{d}$ を直線のパラメタ (媒介変数) 表示, t をパラメタ (媒介変数) という.

$\mathbb{R}$ 実数全体, $\mathbb{R}^2$ 2次元ベクトル全体=平面

1つの直線には複数の媒介変数表示がある.

例: $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}, \vec{x} = \vec{a} + t(2\vec{d}), \vec{x} = \vec{a} + t(-\vec{d}), \vec{p} = \vec{a} - \vec{d} + t\vec{d}$ はすべて同じ直線を表す.



GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

平面内の直線のパラメタ表示

<https://www.geogebra.org/m/skj88vSN>



L05-Q1

Quiz(直線のパラメタ表示)

ベクトル $\vec{d} = (3, 1)$ に平行で, 点 $\vec{a} = (5, 7)$ を通る直線を考える.
直線のパラメタ表示を何個か作ろう (ベクトルで).

mobius IH1.3

点が, パラメタ表示された直線上にあるかどうかの判定

点 $\vec{p}_0$ と, パラメタ表示された直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ を考える.

$\vec{p}_0 = \vec{a} + t\vec{d}$ となる t がひとつでも存在すれば, すなわち, この t についての方程式に解 t が存在すれば, $\vec{p}_0$ は直線上にある.

L05-Q2

Quiz(直線のパラメタ表示)

次のパラメタ表示を持つ平面上の直線を考える.

$$(x, y) = (1, 8) + (2, 5)t. \quad (t \in \mathbb{R})$$

点 $(0, 0)$, $(5, 29)$, $(5, 18)$ はそれぞれ直線上にあるか, 判定しよう.

mobius IH1.3

平面上の直線の，法線ベクトルを用いたベクトル方程式

$\vec{a}$ を通り $\vec{n} (\neq \vec{0})$ に垂直な直線のベクトル方程式 石村畑 線形代数 p.17

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0.$$

$\vec{n}$ を直線の法 (線) ベクトル 石村畑 線形代数 p.17 という.

- 理由: チェック 1 $\vec{a}$ を通る
- 理由: チェック 2 $\vec{n}$ に垂直である

$\vec{a} \cdot \vec{n} = C$ (実数の定数) とおくと,

$$\vec{n} \cdot \vec{p} - C = 0. \quad (C \text{ は定数})$$

$\vec{p} = (x, y), \vec{n} = (a, b)$ として成分で書くと,

$$ax + by - C = 0.$$

<https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P>



直線の方程式とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\vec{p} \in \mathbb{R}^2 | f(\vec{p}) = 0\}$$

となるような (条件) 式 $f(\vec{p}) = 0$ のこと.

直線には, 同値な複数の方程式の形がある.

例: $\vec{p} \cdot \vec{n} - C = 0$, $\vec{p} \cdot (2\vec{n}) - 2C = 0$, $\vec{p} \cdot (-\vec{n}) + C = 0$ はすべて同じ直線を表す.

L05-Q3

Quiz(直線のベクトル方程式)

ベクトル $\vec{n} = (3, 1)$ に垂直で、点 $\vec{a} = (5, 7)$ を通る直線を考える。
直線の方程式を求めよう。

mobius IH1.3

垂直なベクトル

$\vec{d} = (d_1, d_2)$ に垂直で同じ長さのベクトルは、 $\pm\vec{n} = \pm(-d_2, d_1)$ 。

$\vec{n} = (n_1, n_2)$ において、条件から決まる。
たしかに $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0, |\vec{d}| = |\vec{n}|$ になる。

点が, 方程式で表された直線上にあるかどうかの判定

点 $\vec{p}_0$ と, 方程式 $f(\vec{p}) = 0$ を考える.

$f(\vec{p}_0) = 0$ が成立すれば $\vec{p}_0$ は直線上にある.

L05-Q4

Quiz(直線の方程式と点)

次の平面上の直線の方程式を考える.

$$2x + 3y - 19 = 0.$$

点 $(0, 0)$, $(5, 3)$ はそれぞれ直線上にあるか, 判定しよう.

mobius IH1.3

直線の様々な表現

次のどれからどれにでも書き替えられるように.

- 通る点, ...と平行
- 通る点, 方向ベクトル
- パラメタ表示
- 通る点, ...と垂直
- 通る点, 法線ベクトル
- 法線ベクトルによるベクトル方程式

方向ベクトルと法線ベクトルはたがいに垂直

パラメタ表示から機械的に方程式を求める

パラメタ t を消去する.

方程式から機械的にパラメタ表示を求める

いつでもうまくいく方法はない…

平面上の直線の場合はこの方法で.

x 座標を t において y 座標を t で表す. $f(t)$ となったとする.

$$(t, f(t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

が直線のパラメタ表示.

意味や図を考える方法

どちらで与えられるにせよ, いったん図を描き, その直線のパラメタ表示や方程式を考える.

直線の場合, 接線ベクトル $\vec{d} = (d_1, d_2)$ から, それに直交する法線ベクトルが $\vec{n} = (-d_2, d_1)$ と求める方法 (およびその逆) がある.

L05-Q5

Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

- ① 次のようにパラメタ表示される直線の，法線ベクトルを用いた方程式を求めよう．

$$(x, y) = (8, 11) + (2, -3)t \quad (t \in \mathbb{R})$$

- ② 次の方程式で表される直線のパラメタ表示を作ろう．

$$5x - 2y - 10 = 0$$

L05-Q6

Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

- ① ベクトル $\vec{d} = (3, 1)$ に平行で, 点 $\vec{a} = (5, 7)$ を通る直線のパラメタ表示と, 法線ベクトルを用いた方程式を求めよう.
- ② ベクトル $\vec{n} = (3, 1)$ に垂直で, 点 $\vec{a} = (3, 13)$ を通る直線のパラメタ表示と, 法線ベクトルを用いた方程式を求めよう.

mobius IH1.3

石村畑 線形代数 問題 3(p.18), 演習 3(p.19)