

空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L06(2025-04-25 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-25 Fri 17:20 JST hig"

今日の目標

- 石村畑 線形代数 §1.4 空間内の直線のパラメタ表示が書ける
- 石村畑 線形代数 §1.4 空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式が書ける
- 石村畑 線形代数 §1.4 直線と平面の交点を求められる



L05-Q1

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

パラメタ表示は

$$\vec{p} = (3, 1)t + (5, 7) \quad (t \in \mathbb{R} \text{はパラメタ})$$

L05-Q2

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示

$\vec{d} = (2, 5), \vec{a} = (1, 8)$ とする.

- ① $\vec{a} + t\vec{d} = (0, 0)$ となる t が存在しないので, 直線上にない.
- ② $\vec{a} + t\vec{d} = (5, 29)$ となる t が存在しないので, 直線上にない.
- ③ $t = 2$ とすると、 $\vec{a} + t\vec{d} = (5, 18)$ となるので, 直線上にある.

L05-Q3

Quiz 解答: 直線のベクトル方程式

方程式は,

$$(3, 1) \cdot ((x, y) - (5, 7)) = 0$$

すなわち,

$$3x + y - 22 = 0$$

L05-Q4

Quiz 解答: 直線の方程式と点

- ❶ 代入すると方程式が満たされないので, 直線上にない.
- ❷ 代入すると方程式が満たされるので, 直線上にある.

L05-Q5

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

- ① 接線ベクトルが $\vec{d} = (2, -3)$. これと直交する法線ベクトル $\vec{n} = (n_1, n_2)$ を $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\vec{n} = (3, 2)$ は法線ベクトル. よってベクトル方程式は

$$(3, 2) \cdot ((x, y) - (8, 11)) = 0.$$

- ② 法線ベクトルは $\vec{n} = (5, -2)$. これと直交する接線ベクトル $\vec{d} = (d_1, d_2)$ を $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ を解いて求めると, 例えば $\vec{d} = (2, 5)$ は接線ベクトル.

また, 点 $\vec{a} = (2, 0)$ は直線上にあることがわかる.
よってパラメタ表示は

$$(x, y) = (2, 5)t + (2, 0) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

L05-Q6

Quiz 解答: 直線のパラメタ表示と方程式

① パラメタ表示は

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (t \text{はパラメタ})$$

② 法線ベクトルのひとつは $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. よって, 直線の方程式は

$$(\vec{x} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$(x - 5) - 3(y - 7) = 0$$

③ 直線と平行なベクトルのひとつは $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. よってパラメタ表示は

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

方程式は

$$(\vec{x} - \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$3(x - 3) + (y - 13) = 0.$$

ここまで来たよ

5 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

- 平面上の直線の共有点
- 空間内の直線のパラメタ表示
- 空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

復習+例

平面上で考える.

x 軸は直線

原点 $\vec{0} = (0, 0)$ を通る. 方向ベクトルは $\vec{e}_x = (1, 0)$, 法線ベクトルは $\vec{e}_y = (0, 1)$.

~>

パラメタ表示 $\vec{p} = \vec{0} + t\vec{e}_x = (t, 0)$. ($t \in \mathbb{R}$).

ベクトル方程式 $\vec{e}_y \cdot (\vec{p} - \vec{0}) = 0$ すなわち $0x + 1y = 0$.

y 軸は直線

直線と直線の共有点 (両方がパラメタ表示のとき)

2 直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} (t \in \mathbb{R})$, $\vec{p}' = \vec{b} + s\vec{f} (s \in \mathbb{R})$ 共通部分 C を求めたい.

$$C = \{\vec{a} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\} \cap \{\vec{b} + s\vec{f} | s \in \mathbb{R}\}.$$

$\vec{q} \in C$ とすると,

$$\exists s, t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \vec{q} = \vec{a} + t\vec{d} = \vec{b} + s\vec{f}$$

成分表示すると,

$$a_1 + td_1 = b_1 + sf_1$$

$$a_2 + td_2 = b_2 + sf_2$$

これを満たす s, t を求めて, パラメタ表示に代入すればいい.

L06-Q1

Quiz(パラメタ表示された直線の共通部分)

2 直線

$$\vec{p} = (0, 2) + (3, -1)t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\vec{p} = (3, 0) + (6, -1)t \quad (t \in \mathbb{R})$$

の共通部分を求めよう．図を描こう．

石村畑 線形代数 問題 2, 演習 2(p.14,p.15)

直線と直線の共有点 (パラメタ表示と方程式のとき)

2 直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} (t \in \mathbb{R})$, $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ の共通部分 C を求めたい.

方程式をパラメタ表示に書き直してさっきの方法を使ってもよい

$$C = \{\vec{a} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\} \cap \{\vec{p} | \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0\}.$$

$\vec{p} \in C$ とすると,

$$\exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \vec{a} + t\vec{d} = \vec{p} \text{ かつ } \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0.$$

$\vec{p}$ を代入して得られる $\vec{n} \cdot (\vec{a} + t\vec{d} - \vec{b}) = 0$ を満たす t を求めて, パラメタ表示に代入すればいい.

L06-Q2

Quiz(パラメタ表示された直線の共通部分)

2 直線

$$\vec{p} = (0, 2) + (3, -1)t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(0, 1) \cdot (\vec{p} - (3, 0)) = 0$$

の共通部分を求めよう. 図を描こう.

ここまで来たよ

5 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

- 平面上の直線の共有点
- 空間内の直線のパラメタ表示
- 空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

空間内の直線のパラメタ表示

石村畑 線形代数 §1.4(p.20)

$\vec{a}$ を通り, 方向ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のパラメタ表示

石村畑 線形代数 §1.3

$\vec{d} \neq \vec{0}$.

$$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$$

すなわち $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ ($t \in \mathbb{R}$ はパラメタ)

- チェック 1 $\vec{a}$ を通る
- チェック 2 $\vec{d}$ に平行である

GeoGebra(動的幾何ソフトウェア)

2D <https://www.geogebra.org/m/skj88vSN>

3D <https://www.geogebra.org/m/KYg7AZ7M>



空間 (3 次元) のとき, パラメタ表示は,

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + (d_1, d_2, d_3)t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$d_1, d_2, d_3 \neq 0$ の場合, t を消去すると, 見たことのある方程式になる.

$$\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}.$$

$d_i = 0$ の場合は個別に考える必要がある.

空間 (3 次元) のとき平面上の直線の方程式 $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ の形は, 実は空間内の平面の方程式であって, **空間内の直線の方程式ではない** (式の個数が違う)

ここまで来たよ

5 直線のパラメタ表示とベクトル方程式

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

- 平面上の直線の共有点
- 空間内の直線のパラメタ表示
- 空間内の平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

(空間内の) 平面のパラメタ表示

$\vec{a}$ を通り, $\vec{d}, \vec{f}$ に平行な平面のパラメタ表示

$$\vec{p} - \vec{a} = s\vec{d} + t\vec{f}$$

$$\text{すなわち } \vec{p} = \vec{a} + s\vec{d} + t\vec{f} \quad (s, t \in \mathbb{R} \text{ はパラメタ})$$

$\vec{d}, \vec{f} \neq \vec{0}, \vec{d}, \vec{f}$ は平行でない.

<https://www.geogebra.org/m/YHmGKuJN>



詳しくは次回か次々回.

空間内の平面のベクトル方程式 石村畑 線形代数 §1.4(p.21)

平面と垂直なベクトル (1つとは限らない, $\neq \vec{0}$) を, 平面の法 (線) ベクトル **normal vector** 石村畑 線形代数 p.21 という.

$\vec{a}$ を通り, $\vec{n}(\neq \vec{0})$ に垂直な平面のベクトル方程式

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

$\vec{a} \cdot \vec{n} = C$ とおくと,

$$\vec{n} \cdot \vec{p} = C$$

$\vec{n} = (a, b, c)$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C.$$

2D <https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P>

3D <https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2>



例: xy 平面, それに平行な平面

$\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\vec{d} = \vec{e}_x, \vec{f} = \vec{e}_y$ に平行な平面は,

$$\vec{p} = (x_0, y_0, z_0) + (1, 0, 0)s + (0, 1, 0)t$$

その平面は,

$\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\vec{n} = \vec{e}_z$ に垂直なので,

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

$$(0, 0, 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$z - z_0 = 0$$

同様に,

yz 平面に平行な平面の方程式は $x - x_0 = 0$.

zx 平面に平行な平面の方程式は $y - y_0 = 0$.

L06-Q3

Quiz(平面の方程式)

- ① 単位法線ベクトルが $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2)$ であり, 点 $\vec{a} = (1, 0, 0)$ を通る平面の方程式を求めよう.
- ② 単位法線ベクトルが $\vec{n} = (0, 0, 1)$ であり, 点 $\vec{a} = (0, 0, -4)$ を通る平面の方程式を求めよう.

mobius IH1.4

石村畑 線形代数 問題 4(p.22), 演習 4(p.23)

直線 (パラメタ表示) と平面 (ベクトル方程式) の共有点

直線 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} (t \in \mathbb{R})$, 平面 $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ の共通部分 C を求めたい.

$$C = \{\vec{a} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\} \cap \{\vec{p} | \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0\}.$$

$\vec{p} \in C$ とすると,

$$\exists t \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \vec{a} + t\vec{d} = \vec{p} \text{ かつ } \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0.$$

$\vec{p}$ を代入して, $\vec{n} \cdot (\vec{a} + t\vec{d} - \vec{b}) = 0$. これを満たす t を求め, パラメタ表示に代入すればよい.

石村畑 線形代数 問題 4(p.22) 演習 4(p.23)