

行列の和とスカラー倍と積

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L07(2025-04-30 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-04-30 Wed 13:06 JST hig"

今日の目標

- 石村畑 線形代数 §2.1 行列の型と行と列が説明できる
- 石村畑 線形代数 §2.1 行列の和とスカラー倍を計算できる
- 石村畑 線形代数 §2.2 行列の積を計算できる



L06-Q1

Quiz 解答: パラメタ表示された直線の共通部分

$\vec{p}$ が共通部分に含まれるとする.

$$\exists s, t \text{ s.t. } \vec{p} = (0, 2) + (3, -1)t = (3, 0) + (6, -1)s.$$

成分表示して

$$0 + 3t = 3 + 6s,$$

$$2 - t = 0 - s.$$

これを解いて, $t = 3, s = 1$.

パラメタ表示に t を代入して, $\vec{p} = (9, -1)$ (s を代入しても当然同じ結果になる),

よって, 共通部分は $(9, -1)$ の一点.

L06-Q2

Quiz 解答: パラメタ表示された直線の共通部分

$\vec{p}$ が共通部分に含まれるとすると,

$$(\exists t \text{ s.t. } \vec{p} = (0, 2) + (3, -1)t) \text{ かつ } (0, 1) \cdot (\vec{p} - (3, 0)) = 0.$$

その t を t_0 とかく. $\vec{p}$ を代入して,
 $(0, 1) \cdot ((0, 2) + (3, -1)t_0 - (3, 0)) = 0.$

$$2 - t_0 - 0 = 0.$$

よって, $t_0 = 2.$

$t = 2$ を代入することにより, 共通部分は一点 $\vec{p} = (6, 0).$

L06-Q3

Quiz 解答: 平面の方程式

- ① $(3(x - 1) + 1(y - 0) - 2(z - 0)) = 0$, すなわち $3x + y - 2z = 3.$
- ② $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z + 4) = 0$, すなわち, $z = -4.$

ここまで来たよ

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

7 行列の和とスカラー倍と積

- 行列の定義
- 行列の和, スカラー倍
- 行列の積

行列

定義 (行列) 石村畑 線形代数 p.21

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように長方形状に実数を並べて書いたものを m 行 n 列の $((m, n)$ 型の) **行列** という.

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ を A の (i, j) 成分という

Mobius での入力 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ は mobius では

$\langle \langle 1|2|3 \rangle, \langle 4|5|6 \rangle \rangle$ または $\langle \langle 1,4 \rangle | \langle 2,5 \rangle | \langle 3,6 \rangle \rangle$ と入力する.

$\boxed{}$ は縦の隣接, $\boxed{} \boxed{}$ は横の隣接を表す.

数学では、新しい概念（対象）を定義するたびに、対象の「等しい」「相等」を定義する。

「どういう同値類で考えるか」

ある概念で、2つが「等しい」ことの定義は自明ではない。

- 三角形
- 分数
- 零ベクトル

定義 (行列の相等 石村畑 線形代数 p.31)

行列 A, B に対して、

$$\begin{array}{l} A = B \\ \text{def.} \\ \Leftrightarrow \end{array}$$

- A, B の型が同じ ((m, n) とする), かつ
- $\forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \ a_{ij} = b_{ij}$

定義 (行, 列 石村畑 線形代数 p.26)

- m 行 1 列の行列を縦ベクトル, 列ベクトルという 石村畑 線形代数 p.220
- 行列 A の中の $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を, 行列 A の第 j 列という
- A の第 j 列を m 行 1 列の行列すなわちベクトル (列ベクトル, 縦ベクトル) と見なした $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を, A の第 j 列ベクトルという mobius $\langle a, b, c \rangle$
- 1 行 n 列の行列を横ベクトル, 行ベクトルという
- 行列 A の中の $a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in}$ を, 行列 A の第 i 行という
- A の第 i 行を 1 行 n 列の行列すなわちベクトル (行ベクトル, 横ベクトル) と見なした $(a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in})$ を, A の第 i 行ベクトルという 大注意:mobius $\langle a|b|c \rangle$

石村畑 線形代数 問題 5(p.28), 演習 5(p.29) mobius IH2.1

ベクトルは行列の一種だが, mobius では, m 行 1 列の行列 $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ と, 列ベクトル (縦ベクトル) $\langle a, b, c \rangle$ を区別する, など. mobius L00.04

零行列, ゼロ行列

定義 (零行列 石村畑 線形代数 p.30)

すべての成分が 0 である行列を零行列といい O (英字大文字) であらわす.

零行列は多数ある... m 行 n 列であることを特に示すときは, O_{mn} .

この mn は, 成分の a_{ij} とは違い, 型を示す.

あとで調べていくとわかるが, 数 (スカラー) の世界の 0 のような役割の行列.

正方行列

定義 (正方行列 石村畑 線形代数 p.27)

行列 A が n 行 n 列であるとき, A は n 次の**正方行列**という.

定義 (対角行列 石村畑 線形代数 p.220)

$a_{11}, \dots, a_{nn}$ を**対角成分**という.

対角成分でない成分が 0 である正方行列

$(1 \leq \forall i, j \leq n \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \text{ である正方行列 } A)$
を**対角行列**という.

単位行列

定義 (単位行列 石村畑 線形代数 p.30)

n 次の単位行列 E or E_n とは,

n 次正方行列で (i, j) 成分が $e_{ij} = \delta_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ であるものをいう.

正方行列とは, 対角成分が 1 であるような対角行列.

あとで調べていくとわかるが, 数 (スカラー) の世界の 1 のような役割の行列.

ここまで来たよ

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

7 行列の和とスカラー倍と積

- 行列の定義
- 行列の和, スカラー倍
- 行列の積

行列の和, スカラー倍

定義 (行列の和とスカラー倍 石村畑 線形代数 p.32)

- 行列の和
 - ▶ 型が同じ時だけ, 行列と行列の和が定義される
 - ▶ 成分ごとに加える
- 行列のスカラー倍
 - ▶ すべての成分に同じスカラーをかける

定義 (行列の (-1) 倍と差の略記 石村畑 線形代数 p.32)

$$-A \stackrel{\text{def.}}{=} (-1)A.$$

$$A - B \stackrel{\text{def.}}{=} A + (-B) = A + (-1)B.$$

ちょっと, 前から知ってるベクトルに似てる… ベクトルは m 行 1 列の行列だから.

行列のスカラー倍はベクトルの実数倍に相当. ベクトルの実数倍も「スカラー倍」ということがある.

定理 (行列の和とスカラー倍の性質 石村畑 線形代数 定理 2.1.1(p.33))石村畑 線形代数 p.33

相等の定義, 和の定義にもどる. 型と成分が等しいことを言う.
なるべく行列の変数 A, B, O, E , 実数の変数 a, b, c のまま計算し, 成分で書くのは最後の手段

石村畑 線形代数 問題 6(p.34), 演習 6(p.35) mobius IH2.1

ここまで来たよ

6 空間内の平面のパラメタ表示とベクトル方程式

7 行列の和とスカラー倍と積

- 行列の定義
- 行列の和, スカラー倍
- 行列の積

和の記号 $\sum$ の意味を再確認

i	1	2	3	4	5
a	2	3	5	7	11
b	111	107	105	103	102

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11$$

$$b_1 = 111, b_2 = 107, b_3 = 105, b_4 = 103, b_5 = 102$$

$$\sum_{i=2}^4 a_i = 3 + 5 + 7 = \sum_{j=2}^4 a_j,$$

$$\sum_{i=2}^4 2^{a_i} = 2^3 + 2^5 + 2^7,$$

$$\sum_{i=0}^2 a_{i+2} = 3 + 5 + 7,$$

$$\sum_{k=3}^5 b_k = 105 + 103 + 102,$$

$$\sum_{i=p}^q g(a_i) = g(a_p) + g(a_{p+1}) + \cdots + g(a_q).$$

mobius IH1.2

$$\sum_{i=0}^2 b_{5-i} = 102 + 103 + 105,$$

$$\sum_{i=2}^4 a_i b_i = 3 \cdot 107 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 103,$$

$$i = 2, \sum_{j=2}^4 a_i b_j = 3 \cdot 107 + 3 \cdot 105 + 3 \cdot 103,$$

$$\sum_{i=2}^4 a_i b_{6-i} = 3 \cdot 103 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 107,$$

$\vdots$

Quiz(成分の和の記号)

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、次の図の ■ の位置の成分 a_{ij} の和を、 $\sum$ と a_{ij} を使って表そう．正解は1つではないが、1つ答えればよい．

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square & \square & \square & \cdots & \square \end{bmatrix}$$

Hint. $n = 5$ と思って a_{ij} の和で書いてみよう． $\sum$ の式はそれと一致する？

a_{ij} の i, j の関係はあってる？ 最大最小の i はあってる？

行列の積 石村畑 線形代数 p.36

定義 (行列の積 石村畑 線形代数 p.36)

- 行列 A ($\ell \times m$ 型, 成分 a_{ij} ($1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m$))
- 行列 B ($m' \times n$ 型, 成分 b_{ij} ($1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n$))

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 A, B の積 AB が定義され,

- 行列 $C = AB$ ($\ell \times n$ 型, 成分 c_{ij} ($1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n$))

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell = 2, m = m' = 3, n = 2.$$

$$\begin{aligned} c_{\textcolor{red}{2}\textcolor{green}{1}} &= \sum_{\textcolor{blue}{k}=1}^3 a_{\textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{k}} b_{\textcolor{blue}{k}\textcolor{green}{1}} = a_{\textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{1}} b_{\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{1}} + a_{\textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{2}} b_{\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{1}} + a_{\textcolor{red}{2}\textcolor{blue}{3}} b_{\textcolor{blue}{3}\textcolor{green}{1}} \\ &= -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3 \end{aligned}$$

行列の積のルールの直観のおぼえ方

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

横ベクトルと行列の積. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ 縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要.

ベクトルの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は (まだ) 一例とは思えない (型があてない).

なんでこんなへんな定義？

結合則 $(AB)C = A(BC)$ が成立する，役に立つ定義．

対応する成分ごとにかかる積はアダマール積 $\odot$ として知られるが，超マイナー

石村畑 線形代数 問題 7(p.38) 演習 7(p.39) 問題 8(p.40) 演習 8(p.40)

mobius IH1.2